*

Noen teoremer om sannhets- og usannhetsinnholdet til utsagnsmengder med relevans for Poppers teori om versimilitet.

*

Morten Rognes

1987

*

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Del I

§ 0 Innledning

Det er en forutsetning ved lesningen av dette skrift at leseren kjenner de grunnleggende begreper i klassisk logikk og mengdelære. Selvom vår notasjon og terminologi ikke er spesiell, eller avviker i særlig grad fra vanlig praksis, vil det være en fordel om leseren kjenner, og er fullt ut fortrolig med, Rognes [2]. I dette skrift bygger vi også videre på arbeidene Rognes [1], [3], slik at det strengt tatt er nødvendig at leseren fullt ut er kjent med innholdet i dem. Dette arbeidet kan derfor ikke leses som en selvstendig enhet, men må leses etter at man har arbeidet seg gjennom de verkene som er nevnt.

La oss gi en oversikt over innholdet:

I §1 introduserer vi begerepene sannhetsinnholdet og usannhetsinnholdet til en utsagnsmengde, videre det man kan kalle konsekvenssystemet til en utsagnsmengde Δ;1 relativt til en annen utsagnsmengde Δ;2. Tilslutt innføres det vi kaller det Popperske usannhetsinnholdet til en utsagnsmengde.

I §2 nevner vi en rekke setninger som gjelder angående disse begrepene og som kan bevises i teorien T;1 beskrevet og utviklet i Rognes [1], [3]. Vi introduserer også en tentativ definisjon av predikatkonstruksjonen "Δ;1 er en teori som kommer nærmere sannheten i verdenen w enn teorien Δ;2" og viser at denne definisjonen er inadekvat i lys av de teoremer vi har oppført. I §2.1 sammenlignes denne definisjonen av sannhetslikhet med en definisjon som foreslås av Popper og det konkluderes med at den foreslåtte definisjon er en adekvat parafrasering eller rekonstrukjson av Poppers definisjon. Det følger i lys av resultatene i §2 at denne Popperske definisjon av versimilitet er tvilsom og neppe kan brukes for de formål den er tiltenkt.

I lys av de uheldige resultater angående definisjonen av konstruksjonen som ble nevnt ovenfor ser vi i §3 på en mulig endring av denne definisjon. Også dette endrete definisjonsforslag viser seg å være defekt og vi oppfører i denne paragraf en rekke teoremer som viser dette. I §3.1 diskuteres den Popperske versimilitetsdefinisjon videre og vi forslår en parafrasering av definisjonen innenfor rammen av modellteorien for første-ordens språk. Også når Poppers definisjon reformuleres på denne måten viser den seg inadekvat.

Vårt arbeid er delt i to deler. I den første delen, som omfatter §1 – §3.1, nevner vi en rekke satser som kan bevises i teorien T;1. I tillegg kommer vi selvfølgelig inn på de emner som er nevnt ovenfor. I den andre delen, som omfatter §4, gir vi bevisene for de setninger som er nevnt i første del. Denne adskillelse av teoremer og bevis gjøres fordi bevisene er nokså lange og derfor lett ville ha ført til at leseren ville ha tapt viktige sammenhenger av syne om de hadde blitt føyd inn i fremstillingen i den første delen. Den som bare er interessert i våre resultater og som ikke betviler riktigheten av dem kan derfor nøye seg med å lese igjennom Del I.

§ 1 Sannhetsinnholdet og usannhetsinnholdet til en utsagnsmengde.

Som nevnt ovenfor er rammen for våre overlegninger i dette arbeidet teorien T;1 som er formulert og drøftet i Rognes [1]. Den er ytterligere utdypet i Rognes [3]. Teorien T;1 er detaljert beskrevet i de to nevnte arbeider og det vil derfor ikke bli gitt noe resyme av den her. Det forutsettes bare at leseren har et inngående kjennskap til teorien. Notasjon og terminologi fra de arbeidene som er nevnt vil derfor fra nå av bli brukt uten videre og uten spesielle

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

kommentarer og forklaringer. Her nevnes bare at T;1 er en teori om mulige verdener og presise deskriptive utsagn. Dessuten nevnes følgende forhold angående vår notasjon: "I" betegner mengden av mulige verdener. "U" betegner mengden av utsagn. Er w en mulig verden og x et utsagn betyr "True(w,x)" at utsagnet x er sant i verdenen w. Er x et utsagn betegner "s(x)" sannhetsmengden til x, det vil si mengden av alle de logisk mulige verdener hvor utagnet x er sant. Vi bruker "Δ;1", "Δ;2", "Δ;3", "∏;1", "∏;2",... etc. som variabler som tar utsagnsmengder som verdier. Variabeltegnene "x", "y", "z", ... etc. er vanligvis reservert utsagn, men kan i forskjellige sammenhenger også ta andre verdier. "w", "w;1", "w;2", ... brukes normalt til å stå for mulige verdener. Er Δ en utsagnsmengde betegner "SNu(Δ)" utsagnet som er konjunksjonen av alle utsagnene i Δ, "UNu(Δ)" betegner disjunksjonen av alle utsagnene i Δ. Er x et utsagn er Neg(x) det utsagnet som er negasjonen av x. Vi nevner også at hvis Δ er en utsagnsmengde betegner "k(Δ)" konsekvensmengden til Δ. Tilslutt nevnes det at "t" betegner det tautologiske, eller nødvendige, utsagn, det vil si det utsagnet som er sant i alle mulige verdener, mens "k" betegner det kontradiktoriske utsagn, det utsagn som ikke er sant i noen logisk mulig verden.

La oss så gå over til selve saken. Anta w er en mulig verden, ie. at wêI. Da er Tr(w) mengden av alle de utsagn som er sanne i verdenen w. Vi gir den følgende formelle definisjon av uttrykket "Tr(w)":

(1) $Tr(w) = Mg(y: y\hat{e}U \ \& \ True(w,y))$

Mengden av alle de utsagn som er sanne i verdenen w og som samtidig er logiske konsekvenser av utsagnene i mengden Δ betegner vi med "TrC(Δ,w)". På den annen side betegnes mengden av alle de utsagn som er usanne i verdenen w, og som også er logiske konsekvenser av utsagnene i Δ, med "FaC(Δ,w)". De formelle definisjonene av disse to uttrykkene kan formuleres slik:

(2) $TrC(\Delta,w) = Mg(y: True(w,y) \ \& \ y\hat{e}k(\Delta))$
(3) $FaC(\Delta,w) = Mg(y: \neg(True(w,y)) \ \& \ y\hat{e}k(\Delta))$

Når det gjelder notasjonen er det meningen at uttrykkene "TrC" og "FaC" skal gi assosiasjoner i retning av "truth-content" og "falsity-content". Den offisielle lesemåte av "TrC(Δ,w)" er imidlertid "Sannhetsinnholdet til utsagnesmengden Δ i verdenen w". Tilsvarende kan "FaC(Δ,w)" leses: "Usannhetsinnholdet til utsagnsmengden Δ i verdenen w".

På dette punkt bør det bemerkes at Popper ikke definerer sannhetsinnholdet til en teori nøyaktig slik som det gjøres her. Hvis man holder seg til utsagn i den betydning som er innført i forbindelse med teorien T;1 og dessuten har i tankene den konsekvensrelasjon som er innført i Rognes [3], §1, er Poppers definisjon av sannhetsinnholdet til en utsagnsmengde Δ at dette er klassen av alle de ikke-tautologiske utsagn som er konsekvenser av utsagnene i Δ og som er sanne (i den aktuelle verden). Relativiserer vi sannhetsbegrepet til mulige verdener vil følgelig det Popperske sannhetsinnholdet til utsagnsmengden Δ relativt til verdenen w, la oss betegne det med "trC(Δ,w)", være $(k(\Delta)\Omega Tr(w)) - \{t\}$, hvor t er det nødvendige utsagn. (Se Popper [1], side 48) Den formelle definisjonen kan formuleres slik:

(+) $trC(\Delta) = (k(\Delta)\Omega Tr(w)) - \{t\}$

I denne sammenheng er det å bemerke at hvis man sammenligner trC(Δ,w) med TrC(Δ,w) finner man at k(trC(Δ,w)), dvs. konsekvensmengden til trC(Δ,w) faller sammen med

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

k(TrC(Δ,w)) om Δ er en utsagnsmengde og wêI. Dette kan oppføres som et formelt teorem slik:

(A) (ΔêPt(U) & wêI) –> k(trC(Δ,w)) = k(TrC(Δ,w))

La oss gi bevis for denne påstanden:

Bevis for A: I lys av definisjonen av k og Teorem 1 i Rognes [3] har man at:

(1) k(TrC(Δ,w)) = Mg(y: yêU & s(SNu(TrC(Δ,w))) inkl s(y))

Ved hjelp av den samme definisjonen og det samme teoremet har man også (om forutsetningene i A tas for gitt) at:

(2) k(trC(Δ,w)) = Mg(y: yêU & s(SNu(trC(Δ,w))) Inkl s(y))

Fra (1) og (2) fremgår det at det vil være tilstrekkelig å bevise:

(3) s(SNu(TrC(Δ,w))) = s(SNu(trC(Δ,w)))

Nå har man siden trC(Δ,w) Inkl TrC(Δ,w) at k(trC(Δ,w)) Inkl k(TrC(Δ,w)). Dette følger ved hjelp av Teorem 9 i Rognes [3]. Det er derfor nok å vise inklusjonen mot høyre i (3). Anta derfor for vilkårlig w' at (4) w'ês(SNu(trC(Δ,w))). Fra definisjonene av s, SNu, og trC følger herav:

(5) (Ay)(yêk(Δ) & True(w,y) & y≠t –> True(w',y))

Anta for vilkårlig y at (6) yêk(Δ) & True(w,y). Er da y≠t har man i lys av (5) at True(w',y). Er y=t har man at s(y) = s(t) =I og derfor at w'êI =s(y). Herav True(w',y). Siden y var vilkårlig følger det derfor at man har:

(7) (Ay)(yêk(Δ) & True(w,y) –> True(w',y). Men dette innebærer i lys av definisjonen av SNu at w'ês(SNu(k(Δ)ΩTr(w))), mao. at w'ês(SNu(TrC(Δ,w))) som er det vi ønsker. Dette viser at inklusjonen mot høyre i (3) holder og avslutter dermed vårt bevis for A. **QED**

I forbindelse med de begrepsdannelsene som ble nevnt ovenfor innfører vi også den følgende relasjon Cn mellom utsagnsmengder:

(4) Cn(Δ;1,Δ;2) = k(Δ;1UΔ;2) – k(Δ;2)

k(Δ;1UΔ;2) – k(Δ:1) er mengden av alle de utsagn som er logiske konsekvenser av utsagnene i Δ;1UΔ;2, men som ikke er logiske konsekvenser av utsagnene i Δ;2 alene, mao. alle de utagn som er implisert av dem i Δ;1UΔ;2, men ikke av dem i Δ;2. Det virker ikke helt unaturlig å kalle Cn(Δ;1,Δ;2) således definert for *konsekvenssystemet til Δ;1 relativt til Δ;2*. Er f.eks. Δ;2 alle de utsagn som utgjør vår bakgrunnskunnskap ved et gitt tidspunkt og Δ;1 et sett av hypoteser som fremsettes ved dette tidspunkt, vil Cn(Δ;1,Δ;2) være alle de utsagn som logisk sett følger fra hypotesene pluss vår bakgrunnskunnskap, men som ikke følger fra vår bakgrunnskunnskap alene. Kort sagt vil Cn(Δ;1,Δ;2) i dette tilfellet være de logiske følger av hypotesene i Δ;1 som går utover det man vet på forhånd.

Vi definerer uttrykket "Fc;w(Δ)", der Δ er en utsagnsmengde, ved:

(5) Fc;w(Δ) = k(ΔUTrC(Δ,w)) – k(TrC(Δ,w))

Man ser fra definisjonen at Fc;w(Δ) er mengden av alle de utsagn som logisk sett følger fra Δ pluss sannhetsinnholdet til Δ relativt til w, men som ikke følger fra dette sannhetsinnholdet alene. Er w den aktuelle, faktisk realiserte, verden synes Fc;w(Δ) å ha svært mange likhetstrekk med det Popper kaller usannhets-innholdet til en utsagnsmengde. For å skille

Fc;w(Δ) fra FaC(Δ;w), som ble definert ovenfor, fortrekker vi derfor å kalle Fc;w(Δ) for *det Popperske usannhetsinnholdet til utsagnsmengden Δ relativt til verdenen w*.

Heller ikke når det gjelder begrepet usannhetsinnhold har vi fulgt Popper til punkt og prikke. Legger vi igjen til grunn det utsagns- og konsekvens-begrep som er forklart i forbindelse med T;1 og det relative konsekvensbegrep som ble innført ovenfor, kan Popper sies å definere usannhetsinnholdet til en utsagnsmengde Δ relativt til verdenen w som konsekvenssystemet til Δ relativt til det Popperske sannhetsinnhold til Δ relativt til w, mao. som konsekvens-systemet til Δ relativt til trC(Δ,w). (Se Popper [1], side 49). Poppers definisjon burde derfor ha vært formalisert slik:

(5.1) $Fc;w(\Delta) = k(\Delta U trC(\Delta,w)) - k(trC(\Delta,w))$

istedet som ved (5) ovenfor. Nå har vi imidlertid i lys av teorem A at

(a) $k(TrC(\Delta,w)) = k(trC(\Delta,w))$

og siden trC(Δ,w) Inkl k(Δ) og TrC(Δ,w) Inkl k(Δ) har vi i lys av Teorem 9 i Rognes [3] at:

(b) $k(\Delta U trC(\Delta,w)) = k(\Delta) = k(\Delta U TrC(\Delta,w))$

I lys av (a) og (b) ser man umiddelbart at definiens i (5.1) og definiens i (5) betegner nøyaktig det samme. Det følger derfor at disse to definisjonene er ekvivalente. Den terminologi som vi innførete i forbindelse med definisjon (5), "det Popperske usannhetsinnholdet til Δ relativt til verdenen w" synes derfor helt berettiget.

§ 2 Teoremer om sannhetsinnholdet og usannhetsinnhold.

De begrepene som så langt har blitt innført ved definisjonene (1) – (5) i §1 synes å ha en viss naturlighet i seg selv. Med andre ord synes de nærliggende å trekke frem om man søker etter begreper i teorien T;1 som kan være verdt et mer detaljert studium. Det virker derfor ikke søkt om man studerer disse begrepenes egenskaper for sin egen skyld på basis av aksiomene i T;1.

Anta nå at Δ;1 og Δ;2 er to konsistente utsagnsmengder som begge impliserer utsagn som er usanne i en gitt verden w. Anta også at sannhets-innholdet til Δ;2 inkluderer strengt sannhetsinnholdet til Δ;1 relativt til w, og at usannhetsinnholdet til Δ;2 relativt til w er strengt inkludert i usannhets-innholdet til Δ;1. Under disse omstendigheter virker det fristende å si at Δ;2 i en viss forstand kommer nærmere sannheten i verdenen w enn Δ;1 fordi Δ;2 impliserer flere sannheter og færre usannheter enn Δ;1 relativt til w. Man kan vel knapt benekt at dette ved første øyekast kan virke tilforlatelig. Spørsmålet oppstår derfor om man kan, for gitt wêI, vise at det finnes to utsagnsmengder Δ;1 og Δ;2 som oppfyller dette tilsynelatende tilstrekkelige krav for at Δ;2 skal kunne sies å komme nærmere sannheten i verdenen w enn Δ;1. Man kan altså spørre om den følgende setning lar seg utlede i T;1, nemlig:

H;1 $(Ew)(E\Delta;1)(E\Delta;2)(w\hat{e}I \,\&\, \Delta;1,\Delta;2\hat{e}Pt(U) \,\&\, Cons(\Delta;1) \,\&\, Cons(\Delta;2) \,\&\, TrC(\Delta;1;w)\ SInkl\ TrC(\Delta;2,w) \,\&\, \emptyset \neq FaC(\Delta;2,w)\ SInkl\ FaC(\Delta;1,w))$

Vi skal vise at svaret på dette spørsmålet er benektende. Faktisk kan man utlede at negasjonen av H;1 er et teorem i T;1. H;1 kan derfor bare utledes i denne teorien om den er inkonsistent, noe som virker usannsynlig.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Man kan imidlertid gå videre og spørre om ikke H;1 kan utledes om man i denne formuleringen erstatter "FaC(Δ;1,w)" og "FaC(Δ;2,w)" med henholdsvis "Fc;w(Δ;1)" og "Fc;w(Δ;2)". Med andre ord kan man spørre om ikke den følgende formel er et teorem i T;1:

H;2 (Ew)(EΔ;1)(EΔ;2)(wêI & Δ;1,Δ;2êPt(U) &
Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) & TrC(Δ;1;w) SInkl TrC(Δ;2,w) &
ø≠Fc;w(Δ;2) SInkl Fc;w(Δ;1))

Selvom negasjonen av H;1 kan utledes i T;1 behøver vel ikke dette gjelde for H;2? Desverre viser det seg at man kan vise at FaC(Δ,w) = Fc;w(Δ) om ΔêPt(U) og wêI. Derfor er H;2 bevisbart ekvivalent med H;1 i teorien T;1. Det følger da at negasjonen av H;2 kan utledes i T;1.

Derimot kan man vise at den følgende formel, H;3, er et teorem i T;1:

H;3 (Ew)(EΔ;1)(EΔ;2)(wêI & Δ;1,Δ;2êPt(U) &
Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) & TrC(Δ;1;w) SInkl TrC(Δ;2,w) &
FaC(Δ;2,w) SInkl FaC(Δ;1,w))

Man bør notere seg forskjellen mellom H;1 og H;3!. Det at man i H;1 krever at Fac(Δ;2,w)≠ø gjør H;1 til en meget sterkere påstand enn H;3.

I forbindelse med H;1 – H;3 er det også nokså nærliggende å undersøke de følgende påstander, nemlig:

H;4 (Ew)(EΔ;1)(EΔ;2)(wêI & Δ;1,Δ;2êPt(U) &
Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) & TrC(Δ;1;w) SInkl TrC(Δ;2,w) &
ø≠FaC(Δ;2,w) = FaC(Δ;1,w))

og

H;5 (Ew)(EΔ;1)(EΔ;2)(wêI & Δ;1,Δ;2êPt(U) &
Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) & TrC(Δ;1;w) = TrC(Δ;2,w) &
ø≠FaC(Δ;2,w) SInkl FaC(Δ;1,w))

Som man ser uttrykker H;4 den påstand at det finnes en mulig verden w og to konsistente utsagnsmengder Δ;1, Δ;2 med samme ikke-tomme usannhetsinnhold, men der sannhetsinnholdet til Δ;2 inkluderer strengt sannhetsinnholdet til Δ;1 relativt til w.

H;5 uttrykker den påstand at det finnes en verden w og to konsistente utsagnsmengder Δ;1,Δ;2 med samme sannhetsinnhold reltivt til w, men der usannhetsinnholdet til Δ;2 relativt til w er ikke-tomt og strengt inkludert i usannhetsinnholdet til Δ;1 med hensyn til w.

Som ved H;1 og H;2 kan man også spørre om ikke H;4 og H;5 er teoremer i T;1. Desverre viser det seg at H;4 og H;5 ikke holder. Dette innebærer at man kan vise at negasjonene av disse to setningene er teoremer i T;1.

La oss innføre den følgende definisjon som gjør oss i stand til å formulere, på en hendig og kompakt måte, noen korollarer til de resultatene som så langt er nevnt:

(1) CLT;w(Δ;2,Δ;1) <–>
[(TrC(Δ;1,w) SInkl TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;2,w) SInkl FaC(Δ;1,w)) v
(TrC(Δ;1,w) = TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;2,w) SInkl FaC(Δ;1,w)) v

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(TrC(Δ;1,w) SInkl TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;1,w) = FaC(Δ;2,w))]

Uttrykket til venstre i denne definisjonen skal altså brukes som en forkortelse for det lengere uttrykket som står på høyre side. Som man ser ved noe ettertanke er de betingelse som står i definiens i denne definisjonen tilsynelatende tiltrekkelige for at man skal kunne si at Δ;2 kommer nærmere sannheten i verdenen w enn Δ;1. Tilsynelatende, men kanskje også bare tilsynelatende, virker det plausibelt å hevde at det omvendte holder: Hvis Δ;2 kommer nærmere sannheten enn Δ;1 med hensyn på verdenen w så må en av de tre betingelsene som er nevnt i definiens være oppfylt. Det kan derfor være fristende å lese "CLT;w(Δ;2,Δ;1)" som "Δ;2 kommer nærmere sannheten i verdenen w enn Δ;1" og følgelig oppfatte (1) som en definisjon av den sistnevnte konstruksjon. Vi skal straks drøfte dette forslag mer utførlig.

Fra (1) og det faktum at negasjonen av H;1 og negasjonene av H;4 og H;5 er teoremer i T;1 – noe som vil ble bevist i Del II – følger:

H;6 (AΔ;1)(AΔ;2)([Δ;1,Δ;2êPt(U) & Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) & wêI &
FaC(Δ;1,w)≠ø≠FaC(Δ;2,w)] –> ¬CLT;w(Δ;1,Δ;2) & ¬CLT;w(Δ;2,Δ;1))

Dette er det første korollaret vi nevner. Man kan imidlertid også utlede at det ikke kan finnes noen uendelig sekvens av konsistente utsagnsmengder som alle impliserer minst en usannhet i verdenen w og som er slik at det n+1'te ledd i sekvensen bærer relasjonen CLT;w til det foregående, n'te, ledd for alle naturlige tall n. Dette innebærer at den følgende sats kan bevises i T;1:

H;7 ¬(Ew)(E∂)[wêI & ∂: N –> Pt(U) &
(An)(nêN –> (Cons(∂(n)) & FaC(∂(n),w)≠ø)) &
(An)(nêN –> CLT;w(∂(n+1),∂(n)))]

På dette punkt kan det være på sin plass å komme med noen ytterligere kommentarer:

Vi sier at FaC(Δ;1,w) er sammenlignbar med FaC(Δ;2,w) hvis og bare hvis FaC(Δ;1,w) enten strengt inkluderer, er identisk med eller er strengt inkludert i Fac(Δ;2,w). På tilsvarende vis sies sannhetsinnholdet TrC(Δ;1,w) å være sammenlignbart med TrC(Δ;2,w) hvis og bare hvis TrC(Δ;1,w) enten strengt inkluderer, er identisk med eller er strengt inkludert i TrC(Δ;2,w). Er sannhetsinnholdet, såvel som usannhetsinnholdet til to utsagnsmengder Δ;1,Δ;2 sammenlignbare relativt til verdenen w består der følgelig i alt ni muligheter.

Vi lager en oversikt over dem:

A	FaC(Δ;1) SInkl FaC(Δ;2,w) & TrC(Δ;1,w) SInkl TrC(Δ;2,w)
B	FaC(Δ;1) SInkl FaC(Δ;2,w) & TrC(Δ;1,w) = TrC(Δ;2,w)
C	FaC(Δ;1) SInkl FaC(Δ;2,w) & TrC(Δ;2,w) SInkl TrC(Δ;1,w)
D	FaC(Δ;1) = FaC(Δ;2,w) & TrC(Δ;1,w) SInkl TrC(Δ;2,w)
E	FaC(Δ;1) = FaC(Δ;2,w) & TrC(Δ;1,w) = TrC(Δ;2,w)
F	FaC(Δ;1) = FaC(Δ;2,w) & TrC(Δ;2,w) SInkl TrC(Δ;1,w)
G	FaC(Δ;2) SInkl FaC(Δ;1,w) & TrC(Δ;1,w) SInkl TrC(Δ;2,w)
H	FaC(Δ;2) SInkl FaC(Δ;1,w) & TrC(Δ;1,w) = TrC(Δ;2,w)
I	FaC(Δ;2) SInkl FaC(Δ;1,w) & TrC(Δ;2,w) SInkl TrC(Δ;1,w)

Anta nå at (1) Δ;1;Δ;2 er to konsistente utsagnsmengder og dessuten at

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(2) FaC(Δ;1,w) ≠ø & Fac(Δ;2,w)≠ø, i det vi selvfølgelig forutsetter at w er en mulig verden. Fra våre teoremer ¬H;1, ¬H;4 og ¬H;5 følger da at mulighetene D, G og H på listen ovenfor er ekskludert. Siden forutsetningene (1) og (2) rett ovenfor er symmetriske i Δ;1,Δ;2, dvs. vi kan "bytte om" Δ;1 og Δ;2, er også tilfellene B, C og F ekskludert. Igjen på grunnlag av teoremene ¬H;1, ¬H;4 og ¬H;5.

Fra definisjonene av TrC(Δ,w) og FaC(Δ,w) fremgår det trivielt at man har:

(#) Δ;1êPt(U) & wêI –> k(Δ;1) = TrC(Δ;1,w) U FaC(Δ;1,w)

siden ethvert utsagn enten er sant eller usant i enhver verden w. Hvis derfor tilfelle E ovenfor foreligger må vi ha at k(Δ;1) = k(Δ;2). Dette innebærer at utsagnsmengdene Δ;1 og Δ;2 er ekvivalente.

Det gjenstår derfor bare å se på to tilfelle, nemlig tilfellene A og I. Disse tilfellene er ikke utelukket selvom Δ;1 og Δ;2 oppfyller kravene (1) og (2) ovenfor.

Har man f. eks. at Δ;1,Δ;2 er utsagnsmengder, wêI og dessuten at:

(+) ø≠s(SNu(Δ;2)) SInkl s(SNu(Δ;2)) SInkl I & wê(I – s(SNu(Δ;1)))

– og et slikt par av utsagnsmengder er det lett å vise eksistensen av i T;1 – ser man at forutsetningene (1) og (2) er oppfylt og dessuten at A holder. Bytter man om på "Δ;1" og "Δ;2" i (+) får man igjen et tilfelle hvor (1) og (2) holder og hvor dessuten kravet I er oppfylt.

Det fremgår også ved hjelp av (#) at tilfellene A og I impliserer at man har henholdsvis k(Δ;1) SInkl k(Δ;2) og k(Δ;2) SInkl k(Δ;1).

Det følgende er derfor et korollar til de teoremene som så langt har blitt nevnt:

H;7.1 Er Δ;i (i=1,2) to konsistente inekvivalente utsagnsmengder, er FaC(Δ;i)≠ø (i=1,2) og er FaC(Δ;1;w) sammenlignbar med FaC(Δ;2,w) og tilsvarende TrC(Δ;1,w) sammenlignbar med TrC(Δ;2,w) gjelder:
k(Δ;1) SInkl k(Δ;2) v k(Δ;2) SInkl k(Δ;1)

Vi bemerker at det bare er i tre av tilfellene ovenfor at det er rimelig å si at Δ;2 kommer nærmere sannheten i w enn Δ;1 forutsatt at vi begrenser oss til utsagnsmengder der sannhets- og usannhetsinnholdene er sammenligbare. Dette er tilfellene D, G og H. Dette må være helt utelukket i tilfellene B, C, E og F. I de tre sistnevnte tilfelle er det snarere omvendt. Også i tilfellene A og I synes det høyest eiendommelig å snakke om at Δ;2 kommer nærmere sannheten i verdenen w enn Δ;1. Skulle man derfor definere konstruksjonen "Δ;2 kommer nærmere sannheten i verdenen w enn Δ;1" synes det å være nærliggende å foreslå den definisjonen som ble nevnt tidligere, nemlig (1). Dette leder oss på en naturlig måte til å betrakte en definisjon som Popper foreslår av uttrykket "Teorien t;1 har større grad av sannhetslikhet enn teorien t;2" som nettopp synes å være basert på de intuisjoner vi her har gjort rede for.

La oss imidlertid komme med en siste bemerkning før vi skifter tema.

Studerer man definisjonen (1) av "CLT;w(Δ;2,Δ;1)" ser man at denne innholdsmessig sett ikke forandres om man i definiens erstatter uttrykkene "TrC(Δ;1,w)", "TrC(Δ;2,w)" med henholdsvis "trC(Δ;1,w)" og trC(Δ;2,w) og uttrykkene "FaC(Δ;1,w)", "FaC(Δ;2,w)" med henholdsvis "Fc;w(Δ;1)" og "Fc;w(Δ;2)". Dette er fordi – som tidligere bemerket – man har at Fc;w(Δ) = FaC(Δ,w) og fordi man dessuten har at de følgende tre påstander holder:

(i) TrC(Δ;1,w) SInkl TrC(Δ;2,w) <–> trC(Δ;1,w) SInkl trC(Δ;2,w)

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(ii) $TrC(\Delta;1,w) = TrC(\Delta;2,w) <\!\!-\!\!> trC(\Delta;1,w) = trC(\Delta;2,w)$
(i) $TrC(\Delta;2,w)$ SInkl $TrC(\Delta;1,w) <\!\!-\!\!> trC(\Delta;2,w)$ SInkl $trC(\Delta;1,w)$

Relasjonen definert ved (1) forblir altså uforandret om sannhetsinnhold (usannhetsinnhold) erstattes med de tilsvarende Popperske innholdsbegreper.

§ 2.1 Sammenligning med Poppers definisjon.

Definisjonen av "$CLT;w(\Delta;2,\Delta;1)$" som vi ga ovenfor kan sammenlignes med hva Popper har å si om sannhetslikhet i Popper [1], side 52:

"Ved hjelp av disse ideene kan vi nå forklare tydeligere hva vi intuitivt mener med sannhetslikhet eller versimilitet. Intuitivt sett har en teori T1 mindre grad av sannhetslikhet enn en teori T2 hvis og bare hvis (a) deres sannhetsinnhold og falskhetsinnhold (eller målet på disse) er sammenlignbare og enten (b) sannhetsinnholdet, men ikke falskhetsinnholdet til T1 er mindre enn det til T2, eller (c) sannhetsinnholdet til T1 ikke er større enn det til T2, men falskhetsinnholdet er større. Kort sagt, vi sier at T2 er nærmere sannheten, eller ligner mer på sannheten, enn T1 hvis og bare hvis flere sanne setninger følger fra den, men ikke flere usanne setninger, eller minst like mange sanne setninger, men færre usanne setninger."

Hvis vi i den definisjonen Popper her formulerer erstatter "sannhetsinnholdet til T1" med "sannhetsinnholdet til $\Delta;1$ relativt til w" og erstatter "sannhetsinnholdet til T2" med "sannhetsinnholdet til $\Delta;2$ relativt til w" og tilslutt erstatter "T1 har mindre sannhetslikhet enn T2" med "$CLT;w(\Delta;2,\Delta;1)$" ser man at man får frem definisjonen (1) i forrige paragraf dersom man tolker "større enn" som "i mengdeteoretisk forstand mer inklusiv enn". At sannhets-innholdene til T1 og T2 er sammenlignbare innebærer i følge Popper (Se Popper [1], side 50) at sannhetsinnholdet til T1 er inkludert i sannhetsinnholdet til T2 eller omvendt. Tilsvarende for usannhetsinnhold. Men dette krav er overflødig siden det følger fra definiens i definisjonen (1). Hvis man derfor i denne definisjonen setter inn en konstant som betegner den aktuelle verden og oppfatter "sannhet" som "sannhet i den aktuelle verden" synes definisjon (1) i §2 å svare punkt for punkt til den siterte Popperske definisjon av sannhetslikhet.

Popper synes å være av den oppfatning at sannhetslikhet er et viktig vitenskapsfilosofisk begrep, videre at det er et av målene med vitenskapelig forskning å nå frem til teorier som har så stor sannhetslikhet som mulig. Det er dessuten viktig ifølge Popper at man kan klargjøre dette begrep ved hjelp av andre allment forståelige begreper slik at man, uten fare for å si ting som fra en vitenskapelig synsvinkel er meningsløse, kan tale om teoriers sannhetslikhet, eller grad av sannhetslikhet.

Fra intet av det som vi så langt har gjort rede for kan man logisk sett slutte at noen av disse synspunktene er feilaktige eller tvilsomme.

Det som derimot kan betviles synes å være den påstand at den definisjonen som Popper foreslår ovenfor er tilfredstillende. Som man ser kan denne, tilsynelatende uten at man endrer på noe vesentlig, formuleres som ved (1) i §2. Men hvis den definisjonen aksepteres, og forøvrig de teoretiske forutsetninger vi ellers har gjort rede for, følger H;6. Men dette innebærer at det ikke finnes noen teorier $\Delta;1,\Delta;2$ som er konsistente og som begge impliserer noen usannheter og hvor en av dem likevel kommer nærmere sannheten enn den andre. Dette synes eiendommelig. Det skulle jo nettopp å være slike konsistente, men usanne teorier, man gjerne ville sammenligne med hensyn til hvor godt de nærmer seg sannheten. Da virker det unektelig noe inkonsekvent å si at ingen av dem kan kommer nærmere sannheten

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

enn noen annen. Dessuten har vi inntrykk av at dette passer dårlig sammen med de synspunkter på sannhetslikhet som vi tilskrev Popper overfor. I tillegg passer det heller ikke sammen med det forhold at Popper kan tenke seg å hevde, som en plausibel gjetning, at relativitetsteorien er en bedre tilnærmelse til sannheten enn Newtons teori, på samme måte som Newtons teori er en bedre tilnærmelse til sannheten enn Keplers.

§ 3 Vanskeligheter med andre definisjoner av sannhetsinnhold.

La oss fremsette noen andre refleksjoner i forbindelse med definisjon (1) i §2. Vi har nå sett at denne definisjonen vanskelig kan anses som adekvat om "CLT;w(Δ;2,Δ;1)" blir tolket som "Δ;2 kommer nærmere sannheten i w enn Δ;1". La oss imidlertid tenke oss at vi studerer en annen relasjon, nemlig relasjonen "clT(Δ;2,Δ;1)" som er definert på denne måten:

(1) clT;w(Δ;2,Δ;1) <–>
[(TrC(Δ;1,w) « TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;2,w) « FaC(Δ;1,w)) v
(TrC(Δ;1,w) ≈ TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;2,w) « FaC(Δ;1,w)) v
(TrC(Δ;1,w) « TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;1,w) ≈ FaC(Δ;2,w))]

Man ser at definiens i denne definisjonen fremkommer fra den vi ga av "CLT;w(Δ;2,Δ;1)" ved at man erstatter "SInkl" overalt med "«" og erstatter "=" overalt med "≈", med andre ord ved at man overalt erstatter streng mengdeinkusjon med mindre mektighet, og mengdeidentitet med likemektighet. Man ser også at definiens i denne definisjonen impliserer at sannhetsinnholdet og usannhetsinnholdet til Δ;2 må være sammenlignbart med hhv. sannhetsinnholdet og usannhetsinnholdet til Δ;1 i en betydning som blir analog med den vi tidligere har gjort rede for.

Desverre viser det seg at også denne definisjonen ikke er særlig tilfredstillende om vi tolker "clT;w(Δ;1,Δ;2)" som "Δ;2 approksimerer sannheten i w bedre enn Δ;1". Det er nemlig mulig å vise at den følgende setning er et teorem i T;1:

H;8 ¬(Ew)(EΔ;1)(EΔ;2)(Δ;1,Δ;2êPt(U) & wêI & Cons(Δ;i) (i=1,2) &
FaC(Δ;1,w)≠ø & FaC(Δ;2,w)≠ø & clT;w(Δ;2,Δ;1))

Det H;8 uttrykker er – som man ser – at det ikke kan finnes konsistente utsagnsmengder Δ;1,Δ;2 som begge impliserer utsagn som er usanne i verdenen w, men som likevel er slik at Δ;2 approksimerer sannheten i w bedre enn Δ;1 i den betydningen som ble definert ovenfor. Men som påpekt i den forrige paragraf er det nettopp slike teoripar <Δ;2,Δ;1> der begge teoriene er konsistente og impliserer noe usant hvor man ønsker at det skal være mulig i noen tilfelle å si at Δ;2 kommer nærmere sannheten i w enn Δ;1.

Setningen H;8 kan lett utledes fra den følgende setning som også er et teorem i T;1:

H;9 Anta Cons(Δ;i) (i=1,2), Δ;1,Δ;2êPt(U) , wêI og at FaC(Δ;i,w)≠ø for i=1,2. Da gjelder:
(a) FaC(Δ;1,w) ≈ FaC(Δ;2,w) <–> TrC(Δ;1,w) ≈ TrC(Δ;2,w)
(b) FaC(Δ;1,w) « FaC(Δ;2,w) <–> TrC(Δ;1,w) « TrC(Δ;2,w)

Denne setningen kan i sin tur utledes ved hjelp av dette teoremet i T;1:

H;10 (wêI & ΔêPt(U) & ¬(wês(SNu(Δ)))) –> FaC(Δ,w) ≈ TrC(Δ,w)

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Vi bemerker at bevis for alle de satsene som hittil har blitt nevnt blir gitt i §4, og at bevisene for H;8 – H;10 er av en relativt elementær natur.

§ 3.1 Drøftelse av Poppers definisjon. Reformulering av Poppers definisjon i modelteoretiske termer.

Vi har sett at definisjonen av "CTL;w(Δ;2,Δ;1)" i §2 og definisjonen av "clT;w(Δ;2,Δ;1)" i §3 leder til meget eiendommelige resultater om man forsøker å tolke disse uttrykkene som "Δ;2 kommer nærmere sannheten i verdenen w enn Δ;1".

Nå synes det som om definisjon (1) i §2 er en rimelig formalisering av Poppers definisjon. Hvis man aksepterer dette og forøvrig de teoretiske forutsetningene vi har gjort rede for, dvs. teorien T;1, er det nærliggende å konkludere med at Poppers definisjon av sannhetslikhet er utilfredstillende. I beste fall er den misvisende. Nå er det imidlertid ikke sikkert at Popper uten videre vil akseptere teorien T;1 eller den vitenskapelige meningsfullhet til det språk som denne teorien er formulert i. Det kan derfor tenkes at han vil innvende mot våre foreslåtte definisjoner av "logisk konsekvens", "sannhetsinnhold" og "usannhetsinnhold" at de ikke dekker hans intensjoner, og at hans definisjon, som vi har sitert, ikke kan tilfredstillende reformuleres innenfor den muligverdens-teoretiske rammen vi har arbeidet. Selvom det ikke synes å være noe i teorien T;1 eller ved språket til denne, L;e[Δ], som synes å være uforenelig med hovedpunktene i Poppers vitenskapsfilosofi, kan det likevel være slik at dette teoretiske apparat er uakseptabelt for Popper. La oss derfor se oss om etter andre måter å formalisere hans definisjon av sannhetslikhet på.

Det virker rimelig å tro at de grunnleggende begreper og setninger i modellteorien for første-ordens språk skulle kunne aksepteres av Popper. La oss derfor formulere en definisjon på dette grunnlag som overhodet ikke forutsetter noe om f. eks. eksistensen av mulige verdener.

I det følgende lar vi "L;1", "L;2", ... etc. betegne første-ordens språk. Er L et slikt språk betegner M(L) klassen av alle modeller (strukturer) for L. Vi forutsetter at språkene inneholder identitet. Er L et første-ordens språk betegner "CFm(L)" mengden av alle de lukkede formlene i L. Er pêCFm(L) og RêM(L) betyr "Sann(R,p)" at p er sann i modellen R for L. Denne sannhetsrelasjonen forutsetter vi her at er definert på vanlig måte. Er Δ Inkl CFm(L), mao. er Δ en mengde med lukkede formler i L betegner "Sann(R,Δ)" det forhold at alle formlene i Δ er sanne i modellen R. Vi definerer hva som menes med at formelen p er en logisk konsekvens av formlene i Δ relativt til L, i symboler "LKon;L(p,Δ)", ved å si at dette holder hvis og bare hvis enhver modell for L hvor alle formlene i Δ er sanne også er en modell hvor p er sann. Definisjonen kan formaliseres slik:

(1) $\quad LKon;L(p,\Delta) \leftrightarrow [p \hat{e} CFm(L) \,\&\, \Delta \text{ Inkl } CFm(L) \,\&\, (AR)(R \hat{e} M(L) \,\&\, Sann(R,\Delta) \rightarrow Sann(R,p))]$

Vi begrenser altså denne relasjonen til lukkede formler og mengder av lukkede formler i L. La Δ være en mengde av lukkede formler i L. Med konsekvenssystemet til Δ relativt til L forstår vi da mengden av alle de lukkede formlene I L som er logiske konsekvenser av setningene i Δ. Vi betegner konsekvenssystemet til Δ i L med "k;L(Δ)" og gir den følgende formelle definisjon:

(2) $\quad k;L(\Delta) = Mg(p: p \hat{e} CFm(L) \,\&\, LKon;L(p,\Delta))$

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Anta nå at Δ er en mengde der Δ Inkl CFm(L) og at R er en modell for L, ie. RêM(L). Med sannhetsinnholdet til Δ relativt til modellen R i L, TrC;L(Δ;R), forstår vi mengden av alle de setninger i konsekvenssytemet til Δ som er sanne i R. Dette kan formelt defineres slik:

(3) TrC;L(Δ,R) = Mg(p: pêCFm(L) & Sann(R,p) & pêk;L(Δ))

Man kan lett vise at TrC;L(Δ,R) er deduktivt lukket under den konsekvensrelasjonen vi nå har definert ved (1). Dette innebærer at TrC;L(Δ,R) er et konsekvenssystem.

Usannhetsinnholdet til Δ i L relativt til modellen R, FaC;L(Δ,R), definerer vi som klassen av de setninger i konsekvenssystemet til Δ som er usanne i modellen R:

(4) FaC;L(Δ,R) = Mg(p: pêCFm(L) & ¬(Sann(R,p)) & pêk;L(Δ))

Det skulle være lett å iakta den åpenbare analogi som består mellom (3) og (4) og våre tidligere definisjoner av TrC(Δ,w) og FaC(Δ,w) hvor Δ og w er henholdsvis en utsagnsmengde og en mulig verden og ikke, som tilfellet er ved f.eks. TrC;L(Δ,R), en mengde med lukkede formler i L og en modell for L.

Det Popperske falskhetsinnholdet til Δ i L relativt til modellen R betegner vi med Fc;L(Δ,R). Vi gir den følgende definisjon, som er analog med den vi tidligere har gitt:

(5) Fc;L(Δ,R) = k;L(Δ U TrC;L(Δ,R)) – k;L(TrC;L(Δ;R))

Det synes som om Popper skulle kunne akseptere definisjonene (1) – (5), basert som de er på det vanlige modellbegrep og dermed på Tarskis teori om sannhet. Er R;0 den naturlige modell for L kaller vi TrC;L(Δ,R;0) og FaC;L(Δ,R;0) for henholdsvis sannhetsinnholdet til Δ reltivt til L og usannhetsinnholdet til Δ relativt til L.

La oss bruke "CTr;L(Δ;1,Δ;2,R)" som forkortelse for "Teorien Δ;2 i L approksimerer bedre sannhetene i R enn teorien Δ;1". Den definisjonen som vi tidligere siterte hos Popper kan man nå foreslå å formalisere på den følgende måte:

(6) CTr;L(Δ;1,Δ;2,R) <–>
[(TrC;L(Δ;1,R) SInkl TrC;L(Δ;2,R) & FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)) v
(TrC;L(Δ;1,R) = TrC;L(Δ;2,R) & FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)) v
(TrC;L(Δ;1,R) SInkl TrC;L(Δ;2,R) & FaC;L(Δ;2,R) = FaC;L(Δ;1,R))]

Man ser lett analogien mellom denne definisjonen, definisjon (1) i §2 og definisjon (1) i §3.

I forbindelse med de begrepsdannelsene vi nå har innført kan man stille spørsmål som blir helt analoge med dem vi kom inn på, og behandlet, i §2. Er f.eks. usannhetsinnholdet til Δ relativt til R, slik som det er definert ved (4), identisk med det Popperske usannhetsinnholdet til Δ relativt til R, slik dette er definert ved (5)? Svaret på dette er bekreftende. Man har at den følgende setning kan utledes innenfor rammen av T;1 (den rent mengdeteoretiske del som bestemmes av de logiske og mengdeteoretiske aksiomene):

H;11 Δ Inkl CFm(L) & RêM(L) –> FaC;L(Δ,R) = Fc;L(Δ,R)

Fra dette følger det at det er likegyldig om man bruker "Fc;L(Δ;R)" eller "FaC;L(Δ,R)" i definisjon (6).

Man kan gå et steg videre og spørre om under hvilke omstendigheter man har at den følgende påstand holder:

(a) TrC;L(Δ;1,R) SInkl TrC;L(Δ;2,R) & FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)

Noe man kan vise er at dette ikke holder om Cd(Δ;1), Cd(Δ;2)≤ Aleph;0, dvs. Δ;1 og Δ;2 er endelige, og det dessuten er slik at begge setningsmengdene er ikke-tomme, konsistente og har et ikke-tomt falskhetsinnhold relativt til R. La oss i denne forbindelse bemerke at hvis Δ Inkl CFm(L) kaller vi Δ for konsistent, i symboler "Cons;L(Δ)", hvis og bare hvis (ER) (RêM(L) & Sann(R,Δ)). Denne definisjonen er forøvrig helt analog med den tilsvarende definisjonen av konsistent utsagnsmengde.

Fra det som nå er nevnt følger det at det er mulig å gi et bevis for den følgende påstand:

H;12 ø≠Δ;1 & ø≠Δ;2 & Δ;1,Δ;2êPt(CFm(L)) & Cons(Δ;i) (i=1,2) &
1≤Cd(Δ;i)≤ Aleph;0 (i=1,2) & RêM(L) & FaC;L(Δ;i,R) ≠ø (i=1,2) –>
¬[TrC;L(Δ;1,R) SInkl TrC;L(Δ;2,R) &
FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)]

Denne setningen er analog med H;2 som ble nevnt tidligere. Under de samme forutsetninger som i H;12 kan man også vise at de to andre disjunktene i definiens i definisjon (6) er usanne. Dette innebærer at man under forut-setningene i H;12 kan vise at ¬CTr;L(Δ;1,Δ;2,R). Dette synes igjen å være katastrofalt for definisjonen ovenfor. Det følger fra dette at hvis man har med to endelige og konsistente utsagnsmengder å gjøre, som begge impliserer setninger som er usanne i den naturlige modell for L, så kan ikke den ene utsagnsmengden sies å approksimere sannhetene i denne modell bedre enn den andre. Definisjonen av versimilitet som ble gitt rett ovenfor, dvs. (6), synes derfor ikke å passe bedre med Poppers intuisjoner om denne relasjon enn dem vi allerede har kommentert.

Det første av de to resultatene som nettopp ble nevnt kan formuleres slik:

H;13 ø≠Δ;1 & ø≠Δ;2 & Δ;1,Δ;2êPt(CFm(L)) & Cons(Δ;i) (i=1,2) &
1≤Cd(Δ;i)≤ Aleph;0 (i=1,2) & RêM(L) & FaC;L(Δ;i,R) ≠ø (i=1,2) –>
(a) ¬[TrC;L(Δ;1,R) = TrC;L(Δ;2,R) &
FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)]
(b) ¬[TrC;L(Δ;1,R) SInkl TrC;L(Δ;2,R) &
FaC;L(Δ;2,R) = FaC;L(Δ;1,R)]

Vi gir bevis for H;12 og H;13 i §4. Som antydet ovenfor er også den følgende sats bevisbar i T;1. Den kan oppfattes som et korollar til H;12 og H;13:

H;14 ø≠Δ;1 & ø≠Δ;2 & Δ;1,Δ;2êPt(CFm(L)) & Cons(Δ;i) (i=1,2) &
1≤Cd(Δ;i)≤ Aleph;0 (i=1,2) & RêM(L) & FaC;L(Δ;i,R) ≠ø (i=1,2) –>
(¬CTr;L(Δ;1,Δ;2,R) & ¬CTr;L(Δ;2,Δ;1,R))

Før vi nå går over til å gi bevis for alle de setningene som så langt har blitt nevnt kan det være på sin plass med endel bemerkninger i forbindelse med disse teoremene.

Vi har i de foregående paragrafer – og også denne – sett på flere tentative definisjoner av konstruksjonen "Teorien Δ;1 er en teori som kommer nærmere sannheten i verdenen w enn teorien Δ;2" (eller om man foretrekker det: "Teorien Δ;1 er mer sannhetslik med hensyn til verdenen w enn teorien Δ;2"). Disse definisjonene ble formalisert innenfor rammen av T;1 og

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

innenfor rammen av den vanlige modellteori for første-ordens språk. Det viste seg at disse definisjonene, om de ble lagt til grunn, hadde eiendommelige konsekvenser; hovedsakelig den at konsistente teorier som impliserer noe usant alle kommer på lik linje når det gjelder sannhetslikhet eller versimilitet. Dette impliserer at man ikke innenfor klassen av disse teorier kan diskriminere mellom noen teorier som kommer nærmere sannheten enn andre. Det mest nærliggende er da å konkludere med at disse definisjonene er inadekvate og at de "intuisjoner" som ligger til grunn for dem på en eller annen måte er "sprikende". Dette må kanskje fortone seg skuffende for dem som i disse definisjonene hadde sett et mulig grunnlag for en mer omfattende lære om grader av sannhetslikhet innenfor hvilken man kunne presentere interessante og spennende satser om nettopp dette.

De definisjoner av formell art som ble fremlagt var ment som et forsøk på å klargjøre innholdet i den definisjon som ble gitt av Popper og som vi siterte utførlig. Man kan imidlertid ikke uten videre på basis av våre resultater konkludere med at Poppers definisjon er inadekvat. Det kan være – selv om vi nok må bekjenne at vi har et inntrykk av det motsatte – at våre rekonstruksjoner ikke gjengir innholdet i hans definisjon på en tilfredstillende måte.

Man kan heller ikke fra noen av de mer håndfaste resultater som her er fremlagt – dvs. våre teoremer – slutte at ingen adekvat definisjon av uttrykket "Δ;1 kommer nærmere sannheten i w enn Δ;2" kan formuleres innenfor den rammen vi her har arbeidet med. Dette er på ingen måte noe vi anser som bevist i dette skrift. Skulle man seriøst påstå noe slikt burde langt flere definisjons-forslag ha blitt formulert og gjendrevet.

Man kan heller ikke fra våre undersøkelser konkludere med at begrepet sannhetslikhet, eller tale om sannhetslikhet til teorier, er meningsløst. På den annen side kan man heller ikke konkludere med at slik tale er meningsfull i en eller annen rimelig betydning. Vi har på ingen måte fremlagt noe bevismateriale som berettiger en til å trekke noen bestemte slutninger om dette.

Tilsynelatende kan man i endel sammenhenger tale om at en teori kommer nærmere sannheten enn en annen uten at en slik dom virker grepet ut av løse luften. Man kan f.eks. tenke seg en situasjon av den følgende type, hvor den virkelige sammenheng mellom to faktorer X og Y er angitt ved kurven f på figuren nedenfor. Betrakter man da to andre teorier, T1 og T2, som sier at sammenhengen mellom X og Y er gitt ved henholdsvis kurvene f;1 og f;2, virker det ikke helt uberettiget å si at T1 approksimerer bedre, eller ligner mer på, sannheten enn T2.

Betraktes ytterligere en teori T3 som sier at sammenhengen mellom X og Y kan representeres ved f;3, synes denne teori å være fjernere sannheten enn både T1 og T2. I en del tilfeller av denne typen, og kanskje også i mer kompliserte situasjoner, kan det muligens være et visst grunnlag for å tale om sannhetslikhet. Men hvorvidt disse – muligens naive intuisjoner – kan utbygges til en interessant og fruktbar teori om sannhetslikhet kan betviles. Det har heller ikke vært vår mening å si noe om dette her.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Del II

§ 4 Bevis for de teoremer som har blitt nevnt.

I denne delen av vårt arbeid skal vi gi bevis for de satser som vi nevnte i første del. Vi starter med den følgende setning som hovedsakelig sier at det Popperske usannhetsinnholdet til en utsagnsmengde er identisk med usannhetsinnholdet til den:

Teorem 1 (T;1) (wêI & ΔêPt(U)) –> Fc;w(Δ) = FaC(Δ,w)

Bevis: Det er først beleilig å vise at det følgende holder:

(I) k(Δ U TrC(Δ,w)) = k(Δ)

Nå har vi (1) TrC(Δ,w) Inkl k(Δ). Dette følger ved hjelp av definisjonen av TrC. Fra (1) følger videre:

(2) Δ U TrC(Δ,w) Inkl Δ U k(Δ)

Nå har man at Δ Inkl k(Δ) og derfor at ΔUk(Δ)=k(Δ). Fra dette og (2) følger:

(3) ΔU TrC(Δ,w) inkl k(Δ)

Videre må man herav ha at: (4) Δ Inkl (Δ U TrC(Δ,w)) Inkl k(Δ). Fra dette og den generelle setning som sier at

(AΔ;1)(AΔ;2)(Δ;1,Δ;2êPt(U) & Δ;1 Inkl Δ;2 –> k(Δ;1) Inkl k(Δ;2))

følger:

(5) k(Δ) Inkl k(Δ U TrC(Δ,w)) Inkl k(k(Δ)) = k(Δ)

siden man allment har k(k(Δ)) = k(Δ) om ΔêPt(U). Men (I) følger umiddelbart fra (5). Dette viser at (I) holder.

Vi gir dernest bevis for:

(II) s(SNu(k(TrC(Δ,w)))) = s(SNu(Δ)) U {w}

Vi har: (1) TrC(Δ,w) = Mg(y: yêΔ & yêk(Δ) & True(w,y)) = k(Δ)Ω Tr(w)

Videre har man helt generelt at: (2) (AΔ)(ΔêPt(U) –> SNu(k(Δ)) = SNu(Δ)). Fra (1) og (2) følger:

(3) SNu(k(TrC(Δ,w))) = SNu(TrC(Δ,w)) = SNu(k(Δ)ΩTr(w))

Anta for vilkårlig w' at w'ês(SNu(k(Δ)ΩTr(w))). Da følger ved hjelp av definisjonene av SNu og s at: (Ax)(xêk(Δ)ΩTr(w) –> True(w',x)). Siden vi har xêk(Δ) <–> s(SNu(Δ)) Inkl s(x) følger derfor:

(4) (Ax)(True(w,x) & s(SNu(Δ)) Inkl s(x) –> True(w',x))

Sett nå per definisjon x;0 = s;-1(s(SNu(Δ)) U {w}). Da har man åpenbart at:

(5) s(SNu(Δ)) Inkl s(x;0) & True(w,x;0).

Fra (4) og (5) kan man derfor slutte at True(w',x;0) og herav w'ês(SNu(Δ)U{w}). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (II) holder.

La oss se på inklusjonen mot venstre i (II): Anta for vilkårlig w' at

(6) w'ês(SNu(Δ)U{w}). Da har man om man antar at x er en vilkårlig entitet der

(7) xêk(Δ) & True(w,x) at det følgende må være tilfelle:

(8) s(SNu(Δ)) Inkl s(x) & {w} Inkl s(x).

Men fra (6) og (8) følger w'ês(x). Dette innbærer at vi må ha:

(Ax)((xêk(Δ) & True(w,x)) –> True(w',x))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Herav: w'ês(SNu(k(Δ)ΩTr(w))) = s(SNu(k(TrC(Δ,w)))) i lys av (3) ovenfor. Dette viser at også inklusjonen mot venstre i (II) holder og avslutter beviset for (II).

Vi viser nå at:

(III) Fc;w(Δ) = k(Δ) – Mg(y: s(SNu(Δ))U{w} Inkl s(y))

I lys av definisjonen av Fc;w har vi:

Fc;w(Δ) = k(Δ U TrC(Δ,w)) – k(TrC(Δ,w))

Men fra dette, (I), (II) og de følgende to satser som er fremlagt i Rognes [3], nemlig:

(i) ΔêPt(U) –> k(Δ) = Mg(y: yêU & s(SNu(Δ)) Inkl s(y))

(ii) ΔêPt(U) –> s(SNu(Δ)) = s(SNu(k(Δ))

ser man at (III) følger.

I lys av (III) ser man at det vil være tilstrekkelig å bevise:

(IV) [k(Δ) – Mg(y: s(SNu(Δ))U{w} Inkl s(y))] = FaC(Δ,w)

for å gi et bevis for Teorem 1. Anta derfor for vilkårlig y' at

(1) y'êk(Δ) & ¬(y'êMg(y: s(SNu(Δ))U{w} Inkl s(y))). Fra den første konjunkten her følger:

(2) s(SNu(Δ)) Inkl s(y') Fra den andre konjunkten i (1) følger:

(3) ¬(s(SNu(Δ))U{w} Inkl s(y')) Fra dette følger:

(4) ¬(s(SNu(Δ)) Inkl s(y') & {w} Inkl s(y'). Dette er ekvivalent med:

(5) s(SNu(Δ)) Inkl s(y') –> ¬(True(w,y')).

Fra dette og (2) har vi ¬(True(w,y')), som sammen med (1) og definisjonen av FaC(Δ;w) gir y'êFaC(Δ,w). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (IV) holder.

Vi viser tilslutt inklusjonen mot venstre i (IV):

Anta for vilkårlig x at xêFaC(Δ,w), dvs. anta at (6) xêk(Δ) & ¬(True(w,x)). Da har man at s(SNu(Δ)) Inkl s(x) & ¬({w} Inkl s(x)). Fra dette og (6) følger:

xêk(Δ) & ¬ (xêMg(y: s(SNu(Δ)) U {w} Inkl s(y)))

Fra dette følger så: xê[k(Δ) – Mg(y: s(SNu(Δ))U{w} Inkl s(y))]. Dette avslutter beviset for Teorem 1. **QED**

Vårt neste teorem sier at negasjonen av H;1 er et teorem i T;1:

Teorem 2 (T;1) (a) ¬H;1 mao.:

(b) ¬(Ew)(EΔ;1)(EΔ;2)(wêI & Δ;1,Δ;2êPt(U) & Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) & TrC(Δ;1;w) SInkl TrC(Δ;2,w) & ø≠FaC(Δ;2,w) SInkl FaC(Δ;1,w))

Bevis: Vi beviser denne påstanden ved reduktio at absurdum. Anta mot formodning at det finnes w, Δ;1, Δ;2 slik at:

(1) wêI & Δ;1,Δ;2êPt(U) & Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) & TrC(Δ;1;w) SInkl TrC(Δ;2,w) & ø≠FaC(Δ;2,w) SInkl FaC(Δ;1,w)

Sett per definisjon (2) Δ;1* = s(SNu(Δ;1)) & Δ;2* = s(SNu(Δ;2)). Fra den tredje og fjerde konjunkten i (1) har vi:

(3) Δ;1* ≠ø & Δ;2*≠ø

Det er nå utelukkende fem muligheter når det gjelder Δ;1* og Δ;2*. Vi har enten Δ;1* SInkl Δ;2*, eller Δ;2* SInkl Δ;1*, eller Δ;1* = Δ;2*, eller Δ;1*ΩΔ;2*=ø eller tilslutt at Δ;1* Ω

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Δ;2*≠ø & Δ;1* –Δ;2*≠ø & Δ;2*–Δ;1*≠ø. Vi vil vise at antagelsen (1) leder til en motsigelse i alle disse tilfellene.

(I) (4) Δ;1* SInkl Δ;2*. Vi sondrer mellom tre undertilfelle når det gjelder w:

(I.1) wê(I–Δ;2*). Fra dette, (2) og (4) følger, om vi setter per definisjon:
x;0 = s;-1(s(SNu(Δ;1)U{w}) at (5) True(w,x;0) & s(SNu(Δ;1)) Inkl s(x;0). Herav følger så (6) x;0êTrC(Δ;1,w). Fra (4) følger eksistensen av w;1 der man har
(7) ¬(w;1êΔ;1*) & w;1êΔ;2*. Siden wê(I–Δ;2*) følger at w;1≠w. Fra dette og (7) har vi ¬(w;1ê(s(SNu(Δ;1)U{w}) og derfor at: (8) ¬(True(w;1,x;0)). På den annen side har man w;1ês(SNu(Δ;2)). (Jmf. (7)). Det følger at (9) ¬(x;0êk(Δ;2)). Men da har vi ved hjelp av definisjonen av TrC at (10) ¬(x;0êTrC(Δ;2,w)). Fra (6) og (10) følger ¬(TrC(Δ;1;w) Inkl TrC(Δ;2,w)) som åpenbart strider mot den femte konjunkten i (1).
(I.2) wê(Δ;2* – Δ;1*). I dette tilfellet har vi (11) wês(SNu(Δ;2)). Fra den siste konjunkten i (1) følger xêFaC(Δ;2,w) for noe xêU. Etter definisjonen av FaC innebærer dette at (12) xêk(Δ;2) & ¬(True(w,x)). Da s(SNu(Δ;2)) Inkl s(x). Men fra dette og (11) følger wês(x), ie. True(w,x). Dette strider åpenbart mot (12). Også i dette tilfellet kan man altså utlede en motsigelse.
(I.3) wêΔ;1*. Da har man wês(SNu(Δ;1)). Anta xêFaC(Δ;1,w). Da har vi etter definisjonen av FaC at xêk(Δ;1) & ¬(True(w,x)). Fra den første konjunkten følger: s(SNu(Δ;1)) Inkl s(x). Men siden wês(SNu(Δ;1)) følger da wês(x) som åpenbart strider mot at ¬(True(w,x)).

(II) Anta (13) Δ;2* SInkl Δ;1*. Som ovenfor kan vi sondre mellom tre undertilfelle:
(II.1) (14) wê(I –Δ;1*). Da har vi ¬(True(w,SNu(Δ;1))). Det følger videre fra (13) at k(Δ;1) Inkl k(Δ;2). Men fra dette og definisjonen av FaC følger:

FaC(Δ;1,w) Inkl FaC(Δ;2,w)

Dette strider åpenbart mot den siste konjunkten i (1).
(II.2) wê(Δ;1*–Δ;2*). Da har vi at wês(SNu(Δ;1)). Men fra dette og definisjonen av FaC følger at FaC(Δ;1,w) = ø. Dette strider også mot den siste konjunkten i (1).
(II.3) wêΔ;2*. Da har man wês(SNu(Δ;2)). Som i det forrige tilfelle utleder man da FaC(Δ;2,w)=ø. Også dette er uforenelig med (1).

(III) Δ;2* = Δ;1*. Da følger SNu(Δ;2) = SNu(Δ;1). Herav: k(Δ;1)=k(Δ;2). Dette i sin tur impliserer TrC(Δ;1,w) = TrC(Δ;2,w) som helt klart strider mot (1).

(IV) Δ;2*ΩΔ;1*=ø. I dette tilfelle betrakter vi to undertilfelle:
(IV.1) ¬(wê(Δ;2*UΔ;1*)). Sett per definisjon: (15) x;1= s;-1(s(SNu(Δ;1))U{w}). Da har man at wês(x;1) = s(SNu(Δ;1))U{w} og derfor at True(w,x;1). Det følger at
(16) x;1êTr(w). Vi har imidlertid også at s(SNu(Δ;1)) Inkl s(x;1) og derfor at
(17) x;1êk(Δ;1). Fra (16) og (17) kan vi i lys av definisjonen av TrC slutte at
(18) x;1êTrC(Δ;1,w). Nå har vi Δ;2*ΩΔ;1*=ø. Fra dette og definisjonen av x;1 følger at ¬(s(SNu(Δ;2)) Inkl s(x;1)). Dette innebærer at ¬(x;1êk(Δ;2)) og derfor, siden TrC(Δ;2,w) Inkl k(Δ;2), at ¬(x;1êTrC(Δ;2,w)). Fra dette og (18) kan man trekke den slutning at ¬(TrC(Δ;1,w) Inkl TrC(Δ;2,w)). Dette strider mot (1).
(IV.2) wê(Δ;1* U Δ;2*). Er da wêΔ;2* følger wês(SNu(Δ;2)) og derfor at FaC(Δ;2,w)=ø. Dette er umulig i lys av (1). Eller så har vi wêΔ;1* og i så fall at wês(SNu(Δ;1)). Dette impliserer FaC(Δ;1,w)=ø som også strider mot (1).

Disse betraktningene viser at tilfellet Δ;1*ΩΔ;2*=ø er utelukket.
Det gjenstår bare å undersøke ett tilfelle, nemlig:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(V) Δ;1* Ω Δ;2*≠ø & Δ;1* –Δ;2*≠ø & Δ;2*–Δ;1*≠ø

Vi sondrer her mellom to muligheter når det gjelder w:

(V.1) ¬(wê(Δ;1*UΔ;2*)). I dette tilfellet setter vi per definisjon:

x;1= s;-1(s(SNu(Δ;1))U{w})

Da har vi s(SNu(Δ;1)) Inkl s(x;1) og derfor (19) x;1êk(Δ;1). Videre må vi ha at wês(x;1) og derfor at x;1êk(Δ;1)ΩTr(w)= TrC(Δ;1,w). Siden (Δ;2* – Δ;1*)≠ø finnes det w;1ê(Δ;2* – Δ;1*). Da har vi w;1êΔ;2* og videre ¬(w;1êΔ;1*). Det følger da at w;1≠w siden ¬(wê(Δ;1*UΔ;2*)). Fra disse forhold kan man slutte at w;1ês(SNu(Δ;2)) & ¬(w;1ês(x;1)). Dette innebærer ¬(x;1êk(Δ;2)) og derfor at ¬(x;1êTrC(Δ;2,w)) siden TrC(Δ;2,w) Inkl k(Δ;2). Men siden vi nettopp har vist at x;1êTrC(Δ;1,w) følger ¬(TrC(Δ;1,w) Inkl TrC(Δ;2,w)). Dette strider igjen mot (1).

(V.2) wê(Δ;1*UΔ;2*). Da har vi enten wês(SNu(Δ;1)). Da følger det at FaC(Δ;1,w)=ø. Eller så har vi at wês(SNu(Δ;2)). I så fall følger FaC(Δ;2,w)=ø. Begge dele er umulig og i konflikt med (1).

Vi har nå vist at man i alle tilfellene (I) – (V) kan utlede en motsigelse om man forutsetter riktigheten av (1). Dette innebærer at det ikke kan finnes w, Δ;1 og Δ;2 som oppfyller denne betingelsen. Dette avslutter beviset for Teorem 2. **QED.**

Fra Teorem 1 og teorem 2 utledes lett den følgende setning som sier at negasjonen av H;2 er et teorem i T;1:

Teorem 3 (T;1) (a) ¬H;2 mao.:

(b) ¬(Ew)(EΔ;1)(EΔ;2)(wêI & Δ;1,Δ;2êPt(U) & Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) & TrC(Δ;1;w) SInkl TrC(Δ;2,w) & ø≠Fc;w(Δ;2) SInkl Fc;w(Δ;1))

Bevis: Satsen er en åpenbar konsekvens av Teorem 1 og Teorem 2. **QED.**

Vi skal nå diskutere H;3 og straks vise at denne formelen er et teorem i T;1. Først vil vi imidlertid vise riktigheten av den følgende sats:

Teorem 4 (T;1) Anta wêI og ø≠a Inkl (I-{w}). Sett Δ;2= {s;-1({w})} og sett Δ;1={s;-1(a)}. Da gjelder:

(a) Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2)

(b) TrC(Δ;1,w) SInkl TrC(Δ;2,w)

(c) FaC(Δ;2,w) SInkl FaC(Δ;1,w)

Bevis: Fra definisjonen av Δ;2 følger at (Ax)(xêΔ;2 –> True(w,x)). Dette innebærer at Cons(Δ;2). Siden a≠ø må det finnes en w;1 der w;1êa. Da har man at True(w;1,s;-1(a)) og følgelig at (Ax)(xêΔ;1 –> True(w;1,x)). Fra dette følger Cons(Δ;1). Dette viser at punkt (a) i teoremet holder.

Anta for vilkårlig y at yêTrC(Δ;1,w). Da har vi True(w,y) & yêk(Δ;1). Det følger at {w} Inkl s(y) og derfor at yêTr(w). Men:

s(SNu(Δ;2)) = s(s;-1({w})) = {w} Inkl s(y). Derfor: yêk(Δ;2)ΩTr(w) = TrC(Δ;2,w). Dette viser at (1) TrC(Δ;1,w) Inkl TrC(Δ;2,w). Anta mot formodning at s;-1({w})êTrC(Δ;1,w). Da s;-1({w})êk(Δ;1) og det følger at vi må ha:

(2) s(SNu(Δ;1)) Inkl s(s;-1({w})) = {w}.

Men s(SNu(Δ;1)) = s(s;-1(a)) = a. Derfor a Inkl {w}. Men dette strider mot at

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

ø≠a Inkl (I-{w}). Vi har derfor: (3) ¬(s;-1({w})êTrC(Δ;1,w)). På den annen side har vi True(w,s;-1({w})) og derfor at s;-1({w}) êTr(w). Videre at:
s;-1({w})êΔ;2 Inkl k(Δ;2). Det følger fra dette at s;-1({w})êTrC(Δ;2,w). Fra (1), (3) og (4) følger punkt (b) i teoremet.

Anta for reduktio ad absurdum at yêFaC(Δ;2,w) for noe y. Da har vi ¬(True(w,y)) & yêk(Δ;2). Det følger at ¬(True(w,y)) & s(SNu(Δ;2))= {w} Inkl s(y). Men da ¬(True(w,y)) & True(w,y). Dette er åpenbart umulig. Dette viser at
(5) FaC(Δ;2,w)=ø. På den annen side har vi:

s;-1(a)êΔ;1 Inkl k(Δ;1) & ¬(wês(s;-1(a))) siden a Inkl (I–{w})

Da s;-1(a)êFaC(Δ;1,w). Det følger at FaC(Δ;1,w)≠ø. Fra dette og (5) følger åpenbart at FaC(Δ;2,w) SInkl FaC(Δ;1,w). Dette viser at punkt (c) også holder. **QED**

Det følgende teorem sier at H;3 kan utledes i T;1:

Teorem 5 (T;1) (a) H;3
(b) (Ew)(EΔ;1)(EΔ;2)(wêI & Cons(Δ;i) & Δ;iêPt(U) (i=1,2) &
TrC(Δ;1,w) SInkl Trc(Δ;2,w) & FaC(Δ;2,w) Inkl FaC(Δ;1,w))

Bevis: Fra det aksiomet i T;1 som postulerer at det finnes uendelig mange mulige verdener følger eksistensen av en funksjon f slik at f: N –(1-1) –>I. Vi setter w=f(0) og a={f(1),f(2)). Vi har da at wêI & ø≠a Inkl (I–{w}). Setter man så per definisjon Δ;2 = {s;-1({w}} og Δ;1 ={s;-1(a)} følger Teorem 5 ved hjelp av Teorem 4. **QED**.

Det neste vi gir bevis for er at negasjonen av H;4 er et teorem i T;1.

Teorem 6 (T;1) ¬(Ew)(EΔ;1)(EΔ;2)(wêI & Δ;1,Δ;2êPt(U) &
Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) & TrC(Δ;1;w) SInkl TrC(Δ;2,w) &
ø≠FaC(Δ;2,w) = FaC(Δ;1,w))

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w, Δ;1 og Δ;2 som oppfyller følgende krav:

(1) wêI & Δ;1,Δ;2êPt(U) & Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) &
TrC(Δ;1;w) SInkl TrC(Δ;2,w) &ø≠FaC(Δ;2,w) = FaC(Δ;1,w)

Fra den tredje og fjerde konjunkten i (1) følger:

(2) s(SNu(Δ;1))≠ø & s(SNu(Δ;2)) ≠ø

Vi definerer på samme måte som i beviset for Teorem 2 Δ;1* og Δ;2* ved:

(3) Δ;1* = s(SNu(Δ;1)) & Δ;2* = s(SNu(Δ;2))

Nå har man:

(4) (Δ;1* SInkl Δ;2*) v (Δ;2* SInkl Δ;1*) v(Δ;1*=Δ;2*) v
(Δ;1*ΩΔ;2*=ø) v (Δ;1*ΩΔ;2*≠ø & (Δ;2*–Δ;1*)≠ø &(Δ;1*–Δ;2*)≠ø)

Det vil være tilstrekkelig å vise at (1) sammen med hver disjunkt i (4) impliserer en motsigelse. Nå er det to muligheter når det gjelder w. Vi kan enten ha wêΔ;1*UΔ;2* eller wê(I–Δ;1*UΔ;2*). Anta først at wês(SNu(Δ;1)). Hadde man da yêFaC(Δ;1,w) for noe y ville man ha at ¬(True(w,y)) & s(SNu(Δ;1)) Inkl s(y)). Men da følger True(w,y) & ¬True(w,y). Vi må derfor ha at FaC(Δ;1,w)=ø. Men dette strider mot (1). Tilsvarende ser man at wêΔ;2* impliserer FaC(Δ;2,w)=ø som også strider mot (1). Dette innebærer at ¬(wê(Δ;1*UΔ;2*)). Siden wêI følger altså:

(5) wê(I–(Δ;1*UΔ;2*))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Tilfelle I: $\Delta;1^*$ SInkl $\Delta;2^*$. Man har da at $SNu(\Delta;1)\hat{e}k(\Delta;1)$ og at $\neg(SNu(\Delta;1)\hat{e}k(\Delta;2))$. Videre følger ved hjelp av (5) at $\neg(True(w,SNu(\Delta;1)))$. Det følger derfor at $SNu(\Delta;1)\hat{e}FaC(\Delta;1,w)$ og $\neg(SNu(\Delta;1)\hat{e}FaC(\Delta;2,w))$. Fra dette følger imidlertid $FaC(\Delta;1,w) \neq FaC(\Delta;2,w)$ som strider mot (1).

Tilfelle II: $\Delta;2^*$ SInkl $\Delta;1^*$. Dette tilfellet blir helt analogt. Vi har:

$SNu(\Delta;2)\hat{e}k(\Delta;2) \& \neg(SNu(\Delta;2)\hat{e}k(\Delta;1))$

Videre har vi $\neg(True(w,SNu(\Delta;2)))$ i lys av (5). Dette innebærer at:

$SNu(\Delta;2)\hat{e}FaC(\Delta;2,w)$ og $\neg(SNu(\Delta;2)\hat{e}FaC(\Delta;1,w))$

Men da har man igjen at $FaC(\Delta;1,w) \neq FaC(\Delta;2,w)$ som strider mot (1).

Tilfelle III: I dette tilfelle er $\Delta;1^*=\Delta;2^*$. Da følger $k(\Delta;1)=k(\Delta;2)$ og derfor at $TrC(\Delta;2,w) = TrC(\Delta;1,w)$ som åpenbart strider mot den nest siste konjunkten i (1).

Tilfelle IV: $\Delta;1^*\Omega\Delta;2^*=\emptyset$. Da har man $SNu(\Delta;1)\hat{e}k(\Delta;1) \& \neg(True(w,SNu(\Delta;1)))$. Dette innebærer som under I og II at

$SNu(\Delta;1)\hat{e}FaC(\Delta;1,w) \& \neg(SNu(\Delta;1)\hat{e}FaC(\Delta;2,w))$

Dette strider mot den siste konjunkten i (1).

Tilfelle V: $\Delta;1^*\Omega\Delta;2^*\neq\emptyset \& (\Delta;2^*-\Delta;1^*)\neq\emptyset \&(\Delta;1^*-\Delta;2^*)\neq\emptyset$. Vi har da :

(6) $SNu(\Delta;1)\hat{e}k(\Delta;1) \& \neg(True(w,SNu(\Delta;1)))$. Det siste følger ved hjelp av (5). Anta, mot formodning, at $SNu(\Delta;1)\hat{e}k(\Delta;2)$. Da har man at $\Delta;2^*$ Inkl $\Delta;1^*$. Men dette strider mot at $(\Delta;2^*-\Delta;1^*)\neq\emptyset$. Det følger at (7) $\neg(SNu(\Delta;1)\hat{e}k(\Delta;2))$. Fra (6) og (7) har man: $SNu(\Delta;1)\hat{e}FaC(\Delta;1,w) \& \neg(SNu(\Delta;1)\hat{e}FaC(\Delta;2,w))$. Dette strider mot den siste konjunkten i (1).

Det har nå blitt vist at (1) leder til en motsigelse i alle tilfelle. Dette innebærer at det ikke kan finnes w, $\Delta;1$ og $\Delta;2$ som oppfyller (1). **QED**.

Den neste oppgaven er å vise at negasjonen av H;5 er et teorem i T;1:

Teorem 7 (T;1) $\neg(Ew)(E\Delta;1)(E\Delta;2)(w\hat{e}I \& \Delta;1,\Delta;2\hat{e}Pt(U) \&$
$Cons(\Delta;1) \& Cons(\Delta;2) \& TrC(\Delta;1;w) = TrC(\Delta;2,w) \&$
$\emptyset\neq FaC(\Delta;2,w)$ SInkl $FaC(\Delta;1,w))$

Bevis: Beviset har den samme struktur som det for Teorem 6. Vi antar for reduktio ad absurdum at det finnes w, $\Delta;1$ og $\Delta;2$ der:

(1) $w\hat{e}I \& \Delta;1,\Delta;2\hat{e}Pt(U) \&Cons(\Delta;1) \& Cons(\Delta;2) \&$
$TrC(\Delta;1;w) = TrC(\Delta;2,w) \& \emptyset\neq FaC(\Delta;2,w)$ SInkl $FaC(\Delta;1,w))$

Som i forrige bevis setter vi per definisjon: $\Delta;1^* = SNu(\Delta;1) \& \Delta;2^* = SNu(\Delta;2)$. Fra den siste konjunkten i (1) følger at $FaC(\Delta;1,w) \neq\emptyset \neq FaC(\Delta;2,w)$. Dette impliserer i sin tur at $\neg(w\hat{e}\Delta;1^*) \& \neg(w\hat{e}\Delta;2^*)$. I lys av den første konjunkten i (1) må man da h at (2) $w\hat{e}(I - (\Delta;1^*U\ \Delta;2^*))$.

Vi sondrer nå mellom fem tilfelle på nøyaktig samme måte som i beviset for Teorem 6.

Tilfelle I: $\Delta;1^*$ SInkl $\Delta;2^*$. Da har vi om man setter $x;1= s;-1(s(SNu(\Delta;1))U\{w\})$ at $True(w,x;1) \& x;1\hat{e}k(\Delta;1)$. Dette impliserer at (3) $x;1\hat{e}TrC(\Delta;1,w)$. Anta for reduktio ad absurdum at $x;1\hat{e}k(\Delta;2)$. Da har man : $s(SNu(\Delta;2))$ Inkl $s(x;1)$. Dette er imidlertid umulig i

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

lys av (2), det forhold at Δ;1* SInkl Δ;2* og det at s(SNu(Δ;2))≠ø. Derfor ¬(x;1êk(Δ;2)). Det følger at (4) ¬(x;1êTrC(Δ;2,w)). Men (3) og (4) strider mot den nest siste konjunkten i (1).

Tilfelle II: Δ;2* SInkl Δ;1*. Da har vi k(Δ;1) Inkl k(Δ;2). Fra dette og definisjonen av FaC følger FaC(Δ;1,w) Inkl FaC(Δ;2,w). Dette strider mot den siste konjunkten i (1).

Tilfelle III: I dette tilfelle er Δ;1*=Δ;2*. Da følger k(Δ;1)=k(Δ;2) og derfor at FaC(Δ;2,w) = FaC(Δ;1,w) som åpenbart strider mot den siste konjunkten i (1).

Tilfelle IV: Δ;1*ΩΔ;2*=ø. Da har vi i lys av (2) at:
¬(True(w,SNu(Δ;2))) & SNu(Δ;2)êk(Δ;2)
Men da ¬(SNu(Δ;2)êk(Δ;1)), for i motsatt fall ville vi ha:
s(SNu(Δ;1)) Inkl s(SNu(Δ;2)) dvs. Δ;1* Inkl Δ;2*. Men siden Δ;1*≠ø siden Cons(Δ;1) strider det at Δ;1* Inkl Δ;2* mot det forhold at Δ;1*ΩΔ;2*=ø. Det følger at SNu(Δ;2)êFaC(Δ;2,w) & ¬(SNu(Δ;2)êFaC(Δ;1,w)). Dette er igjen uforenelig med den siste konjunkten i (1).

Tilfelle V: Δ;1*ΩΔ;2*≠ø & (Δ;2*–Δ;1*)≠ø &(Δ;1*–Δ;2*)≠ø. Vi har da :
¬(True(w,SNu(Δ;2))) & SNu(Δ;2)êk(Δ;2). Hadde man nå at SNu(Δ;2)êk(Δ;1) ville man ha at Δ;1* Inkl Δ;2* og derfor at (Δ;1*-Δ;2*)≠ø. Men dette er umulig. Vi har derfor ¬(SNu(Δ;2)êk(Δ;1)). Men siden FaC(Δ;1,w) Inkl k(Δ;1) følger at ¬(SNu(Δ;2)êFaC(Δ;1,w)). Det følger at man har:
SNu(Δ;2)êFaC(Δ;2,w) & ¬(SNu(Δ;2)êFaC(Δ;1,w)).
Dette strider mot den siste konjunkten i (1). Dette avslutter beviset for Teorem 7.
QED.

Det kan nå være beleilig å gi bevis for de to korollarene som ble nevnt i §2 i forbindelse med satsene ovenfor. Vi viser først at H;6 er et teorem i T;1:

Teorem 8 (T;1) (AΔ;1)(AΔ;2)(Aw)([Δ;1,Δ;2êPt(U) &
Cons(Δ;1) & Cons(Δ;2) & wêI &FaC(Δ;1,w)≠ø≠FaC(Δ;2,w)] –>
¬CLT;w(Δ;1,Δ;2) & ¬CLT;w(Δ;2,Δ;1))

Bevis: Fra forutsetningene i teoremet følger ved hjelp av Teorem 2, Teorem 6 og Teorem 7 at man ikke kan ha:
(1) TrC(Δ;1,w) SInkl TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;2,w) SInkl FaC(Δ;1,w)
Man kan heller ikke ha:
(2) TrC(Δ;1,w) = TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;2,w) SInkl FaC(Δ;1,w)
Tilslutt har vi i lys av Teorem 7 at det også er utelukket at:
(3) TrC(Δ;1,w) SInkl TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;1,w) = FaC(Δ;2,w)
Men siden (1) – (3) er utelukket under de forutsetninger som er nevnt i teoremet følger det ved hjelp av definisjonen av "CLT;w(Δ;2,Δ;1)" at ¬CLT;w(Δ;1,Δ;2). Det samme resonnement kan gjentas ved å bytte om Δ;1 og Δ;2 siden forutsetningene i Teorem 8 er helt symmetriske med hensyn på Δ;1 og Δ;2. Man har derfor også under disse forutsetningene at: ¬CLT;w(Δ;2,Δ;1). **QED**.

Teorem 9 (T;1) ¬(Ew)(E∂)[wêI & ∂: N –> Pt(U) &
(An)(nêN –> (Cons(∂(n)) & FaC(∂(n),w)≠ø)) &

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(An)(nêN –> CLT;w(∂(n+1),∂(n)))]

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at det finnes en slik verden w og en slik sekvens ∂. Da har vi wêI & Cons(∂(0)) & Cons(∂(1)) & FaC(∂(0))≠ø≠FaC(∂(1)) og dessuten at ∂(0),∂(1)êPt(U). Dessuten må vi ha CLT;w(∂(1),∂(0)). Men dette er umulig i følge Teorem 8. **QED**.

Den viktigste påstanden i §3 er H;10. Denne setningen kan utledes i T;1:

Teorem 10 (T;1) (wêI & ΔêPt(U) & ¬(wês(SNu(Δ)))) –> FaC(Δ,w) ≈ TrC(Δ,w)

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder:

(1) wêI & ΔêPt(U) & ¬(wês(SNu(Δ)))

Definer to funksjoner X1 og X2 ved:

(2) X1 = Mg(<x,s(x) – s(SNu(Δ))>: xêFaC(Δ,w))
X2 = Mg(<x,s(x) – (s(SNu(Δ))U{w})>: xêTrC(Δ,w))

Det vil være tilstrekkelig å vise at man har:

(3) X1 : FaC(Δ,w) –(1-1,på)–> Pt(I – (s(SNu(Δ))U{w}))
(4) X2: TrC(Δ,w) –(1-1,på)–> Pt(I – (s(SNu(Δ))U{w}))

Det følger umiddelbart fra (3) og (4) og definisjonen av likemektighet,≈, at:

TrC(Δ,w) ≈ FaC(Δ,w)

La oss derfor gi bevis for (3) og (4).

Ad (3) Det skulle være lett å se at man har:

(5) Func(X1) & Dom(X1)=FaC(Δ,w)

Anta xêFaC(Δ,w) for vilkårlig x. Da følger: ¬(True(w,x)) & s(SNu(Δ)) Inkl s(x). Fra dette følger videre: s(x)–s(SNu(Δ)) Inkl I –(s(SNu(Δ))U{w}). Dette viser at Rgn(X1) Inkl Pt(I – (s(SNu(Δ)U{w})). Anta på den annen side at yêPt(I – (s(SNu(Δ)U{w})). Da y Inkl (I – (s(SNu(Δ)U{w})). Sett:

x;1= s;-1(s(SNu(Δ))Uy)

Da har man wês(x;1), mao. ¬(True(w,x;1). Dessuten følger det at x;1êk(Δ). Dette innebærer at x;1êFaC(Δ,w). Videre har man at følgende holder:

X1(x;1) = s(s;-1(s(SNu(Δ))Uy)) – s(SNu(Δ)) = s(SNu(Δ))Uy –s(SNu(Δ))=y.

Fra dette følger det at X1 er *på* Pt(I – (s(SNu(Δ)U{w})).

Tilslutt må man vise at X1 er en-entydig. Anta derfor:

x;1,x;2êFaC(Δ,w) & x;1≠x;2 for vilkårlige entiteter x;1,x;2. man har da at :

¬(True(w,x;1)) & ¬(True(w,x;2)). Dessuten må man ha:

s(SNu(Δ)) Inkl s(x;1) & s(SNu(Δ)) Inkl s(x;2). Hadde man da :

X1(x;1) = s(x;1)–s(SNu(Δ)) = s(x;2) – s(SNu(Δ))= X1(x;2) måtte s(x;1)=s(x;2). Men fra dette følger x;1=x;2 som er umulig.

Det vi nå har vist viser at (3) holder.

Ad (4) Også i forbindelse med X2 kulle det være lett å se at X2 er en funksjon og at Dom(X2) = TrC(Δ,w). Det skulle også være klart at:

X2(x) = s(x) –(s(SNu(Δ))U{w}) Inkl I – (s(SNu(Δ))U{w}) og derfor at

X2(x)êPt(I – (s(SNu(Δ)U{w})). Anta på den annen side for vilkårlig y at yêPt(I – (s(SNu(Δ)U{w})), mao. (+) y Inkl (I – (s(SNu(Δ))U{w})). Definer x;2 ved:

x;2 = s;-1(s(SNu(Δ))U{w}Uy). Da har man at:

True(w,x;2) & s(SNu(Δ)) Inkl s(x;2)

Dette innebærer at x;2êTrC(Δ,w). Videre må man ha, i lys av (+):

X2(x;2)= s(x;2)–(s(SNu(Δ))U{w}) = s(SNu(Δ))U{w}Uy – s(SNu(Δ))U{w} = y

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Dette viser at X2 er *på* Pt(I – (s(SNu(Δ)U{w})).

Anta tilslutt at det finnes x;1 og x;2 der:

(5) x;1,x;2êTrC(Δ,w) & x;1≠x;2 og (6) X2(x1)=X2(x;2)

for å vise at en motsigelse da kan utledes. Fra (6) og definisjonen av X2 følger:

(7) s(x;1) – (s(SNu(Δ))U{w}) = s(x;2) – (s(SNu(Δ))U{w})

Fra (5) følger at (8) {w} Inkl s(x;1) & {w} Inkl s(x;2) og dessuten at:

(9) s(SNu(Δ)) Inkl s(x;1) & s(SNu(Δ)) Inkl s(x;2). Videre følger fra (5) og identitetsaksiomet for utsagn at det finnes en w;0 der man enten har

(10) w;0ês(x;1) & ¬(w;0ês(x;2)) eller omvendt. Vi ser bare på det første tilfelle siden det andre blir helt analogt. Siden w;0ês(x;1) er det to muligheter:

w;0ê(s(x;1) – s(SNu(Δ))U{w}. I så tilfelle har vi ved hjelp av (7) at w;0ês(x;2). Men dette strider mot (10). Eller så er det slik at w;0ês(SNu(Δ))U{w}. Dette innebærer at w;0êS(SNu(Δ)) v w;0=w. I begge tilfelle vil vi da i lys av (8) og (9) ha at w;0ês(x;2). Men dette strider også mot (10). Det følger at (10) ikke kan holde. På tilsvarende vis viser man at det er umulig at w;0ês(x;2) & ¬(w;0ês(x;1)). Det er altså umulig å finne x;1, x;2 slik at både (5) og (6) holder. Dette viser at X2 er en-entydig og avslutter dermed beviset for Teorem 10. **QED**.

Som et korollar til Teorem 10 kan man utlede formelen H;9 i §3:

Teorem 11 (T;1) Anta Cons(Δ;i) (i=1,2), Δ;1,Δ;2êPt(U) , wêI og at FaC(Δ;i,w)≠ø for i=1,2. Da gjelder:

(a) FaC(Δ;1,w) ≈ FaC(Δ;2,w) <–> TrC(Δ;1,w) ≈ TrC(Δ;2,w)

(b) FaC(Δ;1,w) « FaC(Δ;2,w) <–> TrC(Δ;1,w) « TrC(Δ;2,w)

Bevis: Fra den tredje forutsetningen i teoremet ¬(wês(SNu(Δ;i)) (i=1,2). Dette sammen med de andre forutsetningene og Teorem 10 impliserer:

(1) FaC(Δ;1,w) ≈ TrC(Δ;1,w)

(2) FaC(Δ;2,w) ≈ TrC(Δ;2,w)

Fra (1) og (2) følger så punktene (a) og (b) i teoremet ved hjelp av velkjente setninger om likemektighet og relasjonen «. Det dreier seg om det faktum at like-mektighets-relasjonen er transitiv og at den følgende setning holder generelt for alle mengder x;1, x;2, y;1 og y;2:

x;1≈y;1 & x;2≈y;2 –> (x;1«x;2 <–> y;1«y;2). **QED**

Vi viser så at H;8 er et teorem i T;1:

Teorem 12 (T;1) ¬(Ew)(EΔ;1)(EΔ;2)(Δ;1,Δ;2êPt(U) & wêI & Cons(Δ;i) (i=1,2) & FaC(Δ;1,w)≠ø & FaC(Δ;2,w)≠ø & clT;w(Δ;2,Δ;1))

Bevis: Anta det finnes w, Δ;1, Δ;2 der vi har:

(1) Δ;1,Δ;2êPt(U) & wêI & Cons(Δ;i) (i=1,2) & FaC(Δ;1,w)≠ø & FaC(Δ;2,w)≠ø

Anta også for reduktio ad absurdum at (2) clT;w(Δ;2,Δ;1). Fra (1) og Teorem 11 følger at:

(3) FaC(Δ;1,w) ≈ FaC(Δ;2,w) <–> TrC(Δ;1,w) ≈ TrC(Δ;2,w)

(4) FaC(Δ;2,w) « FaC(Δ;1,w) <–> TrC(Δ;2,w) « TrC(Δ;1,w)

(Siden forutsetningene i Teorem 11 er symmetriske med hensyn på Δ;1 og Δ;2)

Fra (2) og definisjoen av clT følger at vi må sondre mellom tre tilfelle. Vi viser at det i hvert enkelt tilfelle kan utledes en motsigelse. Dette innebærer at man kan trekke den slutning at

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

det ikke finnes w, Δ;1 og Δ;2 slik at både (1) og (2) holder. Fra (2) og definisjonen av clT følger at man enten har:

(5) TrC(Δ;1,w) « TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;2,w) « FaC(Δ;1,w)

Men fra dette og (4) følger TrC(Δ;1,w)«TrC(Δ;1,w). Dette er åpenbart umulig.

Eller så har man:

(6) TrC(Δ;1,w) ≈ TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;2,w) « FaC(Δ;1,w)

Men fra dette og (4) følger: TrC(Δ;2,w) « TrC(Δ;1,w). Dette strider mot (6).

Eller så har man:

(7) TrC(Δ;1,w) « TrC(Δ;2,w) & FaC(Δ;1,w) ≈ FaC(Δ;2,w). Men da har vi ved hjelp av (3) at TrC(Δ;1,w) ≈ TrC(Δ;2,w) som sammen med (7) gir oss en motsigelse. Dette avslutter beviset for Teorem 12. **QED**

La oss nå se på de påstandene som er nevnt i §3.1. Man kan først vise at H;11 er et teorem i T;1:

Teorem 13 Δ Inkl CFm(L) & RêM(L) –> FaC;L(Δ,R) = Fc;L(Δ,R)

Bevis: I lys av definisjonene som er gitt i § 3.1 er det tilstrekkelig å bevise:

(1) k;L(Δ) Ω Mg(p: pêCFm(L) & ¬Sann(R,p)) =
k;L(ΔUTrC;L(Δ,R)) – k:L(TrC;L(Δ,r))

Vi vil ha bruk for den følgende setning . Den lar seg lett bevise:

(2) (AΔ;1)(AΔ;2)(Δ;1,Δ;2êCFm(L) –>
(a) Δ;1 Inkl k;L(Δ;1)
(b) Δ;1 Inkl Δ;2 –> k;L(Δ;1) Inkl k;L(Δ;2)
(c) k;L(k;L(Δ;1)) = k;L(Δ;1))

Beviset for (2) overlates her til leseren som en øvelse.

Først viser vi:

(3) k;L(ΔU TrC;L(Δ,R)) = k;L(Δ)

Fra definisjonen av TrC;L(Δ;R) har vi at (4) TrC;L(Δ,R) Inkl k;L(Δ). Fra (4) følger:

(5) Δ Inkl ΔU TrC;L(Δ,R) Inkl ΔU k;L(Δ) = k;L(Δ).

Den siste konjunkten i (5) følger ved hjelp av punkt (a) i (2). Fra (5) og (2) følger videre:

(6) k;L(Δ) Inkl k;L(ΔU TrC;L(Δ,R)) Inkl k;L(k;L(Δ))

Siden k;L(k;L(Δ)) = k;L(Δ) i lys av punkt (c) i (2) har vi ved hjelp av (6) at (3) holder.

Fra (3) og (1) ser man at det vil være tilstrekkelig å bevise:

(7) k;L(Δ) Ω Mg(p: pêCFm(L) & ¬Sann(R,p)) =
k;L(Δ) – k:L(TrC;L(Δ,R))

(A) Vi viser først inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig p at

(8) pêk;L(Δ) & ¬Sann(R,p). Anta for reduktio ad absurdum at

(9) pêk;L(TrC;L(Δ,R)) Da har vi LKon;L(p, TrC;L(Δ,R)) som innebærer at:

(10) (AR')(Sann(R',TrC;L(Δ;R)) –> Sann(R',p)). Nå har man:

TrC;L(Δ,R) = Mg(p: pêCFm(L) & Sann(R,p) & pêk;L(Δ))

Vi har derfor at (Ap)(pêTrC;L(Δ,R) –> Sann(R,p)), mao. Sann(R,TrC;L(Δ;R)). Dette og (10) impliserer Sann(R,p) som strider mot (8). Vi har derfor at (9) er usann og derfor at ¬(pêk;L(TrC;L(Δ,R))). Sammen med (8) impliserer dette:

pêk;L(Δ) – k;L(TrC;L(Δ,R)) som nettopp er det vi ønsker.

(B) Vi beviser så inklusjonen mot venstre i (7): Anta:

(11) pêk;L(Δ) & ¬(pêk;L(TrC;L(Δ,R)))

Det vil være nok å bevise ¬Sann(R,p). Anta derfor for reduktio ad absurdum at (12) Sann(R,p). Fra (11) og (12) og definisjonen av TrC;L følger:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

pêTrC;L(Δ,R) Inkl k;L(TrC;L(Δ,R)). (Jmf. (2), punkt (a)). Dette gir oss helt åpenbart en motsigelse.

Vi har nå vist at (7) holder og dermed fullført beviset for Teorem 13. **QED**

Den andre påstanden som nevnes i §3.1 er det følgende teorem:

Teorem 14 (T;1) ø≠Δ;1 & ø≠Δ;2 & Δ;1,Δ;2êPt(CFm(L)) & Cons(Δ;i) (i=1,2) & 1≤Cd(Δ;i)≤ Aleph;0 (i=1,2) & RêM(L) & FaC;L(Δ;i,R) ≠ø (i=1,2) –> ¬[TrC;L(Δ;1,R) SInkl TrC;L(Δ;2,R) & FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)]

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at antesedenten i teoremet holder, men ikke konsekventen. Dette innebærer at det finnes Δ;1,Δ;2, R og L der:

(1) ø≠Δ;1 & ø≠Δ;2 & Δ;1,Δ;2êPt(CFm(L)) & Cons(Δ;i) (i=1,2) & 1≤Cd(Δ;i)≤ Aleph;0 (i=1,2) & RêM(L) & FaC;L(Δ;i,R) ≠ø (i=1,2)

og (2) TrC;L(Δ;1,R) SInkl TrC;L(Δ;2,R) & FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)

Vi setter per definisjon:

(3+) Δ;1* = Mg(R: RêM(L) & Sann(R;Δ;1))
Δ;2* = Mg(R: RêM(L) & Sann(R;Δ;2))

Dette innebærer at Δ;1* er klassen av alle de modeller for L der alle formlene i Δ;1 er sanne og at Δ;2* er klassen av alle de modellene for R hvor alle setningene i Δ;2 er sanne. Nå er det lett å vise at hvis RêΔ;1* så har man FaC;L(Δ;1,R)=ø og tilsvarende for Δ;2. For hadde man RêΔ;1* ville man ha

(Ap)(pêΔ;1 –> Sann(R,p))

Anta nå for reduktio ad absurdum at qêFaC;L(Δ;1,R) for noe q. Da følger at:
(+) qêk;L(Δ;1) & ¬Sann(R,q). Siden qêk;L(Δ;1) følger fra definisjonen av k;L at (AR') (Sann(R',Δ;1) –> Sann(R',q)). Siden Sann(R,Δ;1) følger derfor Sann(R,q) som strider mot (+). Vi har derfor:

(3) Rê(M(L) – (Δ;1*UΔ;2*))

Vi sondrer nå, på samme måte som i tidligere bevis, mellom forskjellige tilfeller:

Tilfelle (I): Δ;1* SInkl Δ;2*. I dette tilfellet har vi (4) k;L(Δ;2) Inkl k;L(Δ;1). For anta for vilkårlig p at pêk;L(Δ;2). Da har vi i lys av definisjonen av k;L at

(AR')(Sann(R',Δ;2) –> Sann(R,p)). Men fra Δ;1* SInkl Δ;2* følger:

(AR)(Sann(R,Δ;1) –> Sann(R,Δ;2)).

Derfor har man:

(AR)(Sann(R,Δ;2) –> Sann(R,p)). Men dette vil si at pêk;L(Δ;1). Dette viser at (4) holder. Men fra (4) og definisjonen av TrC;L følger:

(5) TrC;L(Δ;2,R) Inkl TrC;L(Δ;1,R) som åpenbart strider mot (2).

Tilfelle (II): Δ;2* SInkl Δ;1*. I dette tilfellet har vi k;L(Δ;1) Inkl k;L(Δ;2) og derfor i lys av definisjonen av FaC;L at FaC;L(Δ;1,R) Inkl FaC;L(Δ;2,R). Men dette strider mot den siste konjunkten i (2).

Tilfelle (III): Δ;2* = Δ;1*. I så tilfelle har vi k;L(Δ;1) = k;L(Δ;2) og derfor at TrC;L(Δ;1,R) = TrC;L(Δ;2,R). Dette strider igjen mot (2).

Tilfelle (IV): Δ;2*ΩΔ;1* = ø. Fra (1) følger, siden Cons;L(Δ;i) (i=1,2), at Δ;i*≠ø (i=1,2). Videre følger fra (1) at Δ;2 og Δ;1 er endelige, dvs. at vi har

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Δ;2={p;1,...,p;n} for noe n≥1 og Δ;1={q;1,...,q;m} for noe m≥1 der p;1,...,p;n,q;1,...,q;mêCFm(L). Vi setter per definisjon:

p= (p;1&...&p;n) q= (q;1&...&q;m)

slik at p og q er henholdvis konjunksjonen av alle formlene i Δ;2 og Δ;1. Nå har man åpenbart at (6) pêk;L(Δ;2). Videre har man i lys av (3) at ¬(RêΔ;2*) og derfor at ¬Sann(R,p;k) for noe kê{1,...,n}. Fra dette følger ¬Sann(R,p). Dette og (6) impliserer at (7) pêFaC;L(Δ;2,R). Anta mot formodning at pêFaC(Δ;1,R). Da har man (7.1) pêk;L(Δ;1) dvs. (AR')(Sann(R',Δ;1) –> Sann(R',p)). Siden Δ;1*≠ø finnes R;1 der vi har (8) Sann(R;1,Δ;1). Siden Δ;1*ΩΔ;2*=ø har vi ¬(R;1êΔ;2*). Dette innebærer at (9) ¬(Sann(R;1,Δ;2). Fra (8) og (7.1) følger : (10) Sann(R;1,p). Fra (9) har vi (Er)(rêΔ;2 & ¬Sann(R;1,r)). Dette er ekvivalent med at:
¬Sann(R;1,p;k) for noe kê{1,...n}. Men da, siden p=(p;1&...&p;n), følger ¬Sann(R;1,p) som strider mot (10). Vi har derfor ¬(pêk;L(Δ;1)) og følgelig
(11) ¬(pêFaC;L(Δ;1,R)). Men (7) og (11) strider mot (2) ovenfor.

Tilfelle (V): Δ;2*ΩΔ;1* ≠ø & (Δ;2*–Δ;1*)≠ø & (Δ;1* –Δ:2*)≠ø. Vi antar som i forrige tilfelle at Δ;2={p;1,...,p;n} og Δ;1= {q;1,...,q;m}. Dessuten at p=(p;1&...&p;n) og q=(q;1&...&q;m). På samme måte som i forrige tilfelle utleder man at
(12) pêk;L(Δ;2) & ¬Sann(R,p). Dette impliserer at (13) pêFaC;L(Δ;2,R). Siden (Δ;1* – Δ;2*)≠ø har vi at det finnes en R;1 der (14) R;1êΔ;1* &¬(R;1êΔ;2*). da har vi, siden p=(p;1&...&p;n) at (15) ¬Sann(R;1,p). Fra (14) og (15) følger så at ¬(pêk;L(Δ;1)) og derfor at (16) ¬(pêFaC;L(Δ;1,R). Men (13) og (16) strider mot (2).

Vi har nå vist at i alle tilfellene (I) – (V) kan man utlede en motsigelse. Siden disse tilfellene er gjensidig eksklusive og uttømmer alle muligheter følger det at konjunksjonen av (1) og (2) ikke er oppfylt for noen formelmengder Δ;1,Δ;2 og noe par <R,L> der L er et første-ordens språk og R en modell for L. **QED**.

Vi skal vise at H;13 i §3.2 er et teorem i T;1:

Teorem 15 (T;1) ø≠Δ;1 & ø≠Δ;2 & Δ;1,Δ;2êPt(CFm(L)) & Cons(Δ;i) (i=1,2) & 1≤Cd(Δ;i)≤ Aleph;0 (i=1,2) & RêM(L) & FaC;L(Δ;i,R) ≠ø (i=1,2). –>

(a) ¬[TrC;L(Δ;1,R) = TrC;L(Δ;2,R) & FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)]

(b) ¬[TrC;L(Δ;1,R) SInkl TrC;L(Δ;2,R) & FaC;L(Δ;2,R) = FaC;L(Δ;1,R)]

Bevis: Anta:

(1) ø≠Δ;1 & ø≠Δ;2 & Δ;1,Δ;2êPt(CFm(L)) & Cons(Δ;i) (i=1,2) & 1≤Cd(Δ;i)≤ Aleph;0 (i=1,2) & RêM(L) & FaC;L(Δ;i,R) ≠ø (i=1,2)

Vi setter også i dette beviset:

(2) Δ;1* = Mg(R: RêM(L) & Sann(R;Δ;1))
Δ;2* = Mg(R: RêM(L) & Sann(R;Δ;2))

Fra (1) og (2) utleder man på den samme måten som i det forrige beviset at:

(3) Rê(M(L) –(Δ;1*UΔ;2*))

Ad (a) Vi sondrer her, på samme måte som i beviset for Teorem 14, mellom fem forskjellige tilfelle:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Tilfelle (I): Δ;1* SInkl Δ;2*. Vi har Δ;1={p;1,...,p;n} og Δ;2={q;1,..,q;m} i lys av (1) siden 1≤ Cd(Δ;i)≤Aleph;0 (i=1,2) der p;1,...,p;n,q;1,...,q;nêCFm(L). Vi setter.

p= (p;1&...&p;n) og q = (q;1&...&q;m)

I lys av (3) har vi ¬(RêΔ;1*). Det følger at ¬Sann(R,Δ;1) og derfor at ¬Sann(R,p). På samme vis ser man i lys av (3) at ¬Sann(R,q). Dette innebærer imidlertid at Sann(R,¬q). Vi har derfor (4) Sann(R,pv¬q). Videre er det klart at

(5) (pv¬q)êk;L(Δ;1). Det følger derfor fra (4) og (5) at

(6) (pv¬q)êTrC;L(Δ;1,R).

Fra Δ;1* SInkl Δ;2* følger at det finnes en R;1 der (7) R;1êΔ;2* & ¬(R;1êΔ;1*). Fra (7) følger: Sann(R;1,q) & Sann(R;1,¬p) og derfor

(8) ¬Sann(R;1,pv¬q))

Fra (7) og (8) følger derfor at ¬((pv¬q)êk;L(Δ;2)). Herav har man:

(9) ¬((pv¬q)êTrC;L(Δ;2,R).

Fra (6) og (9) følger TrC;L(Δ;1,R) ≠ TrC(Δ;2,R). (a) i teoremet holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (II): Δ;2* SInkl Δ;1*. På samme måte som i forrige bevis utleder vi fra dette og (2) at FaC;L(Δ;1,R) Inkl FaC(Δ;2,R). Dette impliserer:

¬(FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)).

Men dette impliserer åpenbart (a).

Tilfelle (III): Δ;2* = Δ;1*. I så tilfelle har vi k;L(Δ;1) = k;L(Δ;2) og derfor at FaC;L(Δ;1,R) = FaC;L(Δ;2,R). Dette innebærer at ¬(FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)) som igjen impliserer den første konsekventen i teoremet, dvs. (a).

Tilfelle (IV): Δ;2*ΩΔ;1* = ø. På samme måte som i det tilsvarende tilfellet i forrige bevis utleder vi fra Δ;2*ΩΔ;1* = ø, (1) og (2) at:

¬(FaC;L(Δ;2,R) Inkl FaC;L(Δ;1,R)). Men herav følger:

¬(FaC;L(Δ;2,R) SInkl FaC;L(Δ;1,R)). Fra dette følger så (a).

Tilfelle (V): Δ;2*ΩΔ;1* ≠ø & (Δ;2*–Δ;1*)≠ø & (Δ;1* –Δ:2*)≠ø. Som i det tilsvarende tilfelle i beviset for Teorem 14 utleder vi fra dette, (1) og (2):

¬(FaC;L(Δ;2,R) Inkl FaC;L(Δ;1,R)). men herav følger punkt (a) i teoremet.

Så langt har vi gitt bevis for den første halvdelen i teoremet.

Ad (b): Igjen ser vi på de tilfellene vi studerte ovenfor:

Tilfelle (I): Δ;1* SInkl Δ;2*. Vi har Δ;1={p;1,...,p;n} (n≥1) for noen p;1,..,p;nêCFm(L) og Δ;2={q;1,...,q;m} (m≥1) for visse q;1,...,q;nêCFm(L). Vi setter:

p = (p;1&...&p;n) og q = (q;1&...&q;m)

I lys av (3) har man at ¬(RêΔ;2*). Dette impliserer at ¬(RêΔ;1*). Herav kan man utlede (10) ¬Sann(R,p). På den annen side har vi:

(AR')(Sann(R',Δ;1) –> Sann(R,p))

og derfor at pêk;L(Δ;1). Det følger at (11) pêFaC;L(Δ;1,R). Fra Δ;1* SInkl Δ;2* følger eksistensen av R;2 slik at (12) R;2êΔ;2* & ¬(R;2êΔ;1*). Da har man: ¬Sann(R;2,p). Derfor ¬(pêk;L(Δ;2)). Det følger da at: (13) ¬(pêFaC;L(Δ;2,R)). Fra (11) og (13) følger så FaC;L(Δ;1,R) ≠ FaC;L(Δ;2,R). Herav følger i sin tur (b).

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Tilfelle (II): Δ;2* SInkl Δ;1*. Dette tilfelle kan hovedsakelig behandles på samme måte som det foregående tilfelle. Man behøver bare å bytte om Δ;1 og Δ;2 samt p og q i dette beviset. Fra Δ;2* SInkl Δ;1* , (1) og (2) utleder man at:

¬Sann(R,q) & qêk;L(Δ;2). Derfor qêFaC;L(Δ;2,R).

På den annen side må man nå ha ¬(qêk;L(Δ;1) og derfor ¬(qêFaC;L(Δ;1,R)). Men da FaC;L(Δ;1,R) ≠ FaC;L(Δ;2,R) som åpenbart impliserer (b).

Tilfelle (III): Δ;2* = Δ;1*. Da følger TrC;L(Δ;1,R) = TrC;L(Δ;2,R). Dette impliserer igjen at (b) holder.

Tilfelle (IV): Δ;2*ΩΔ;1* = ø. Fra dette, (1) og (2) utleder vi på nøyaktig samme måte som i det tilsvarende bevis for Teorem 14 at FaC;L(Δ;2,R)≠ FaC;L(Δ;1,R). Dette impliserer (b).

Tilfelle (V): Δ;2*ΩΔ;1* ≠ø & (Δ;2*–Δ;1*)≠ø & (Δ;1* –Δ:2*)≠ø. Fra dette, (1) og (2) utleder man – igjen på den samme måten som i det tilsvarende tilfelle i beviset for Teorem 14 – at FaC;L(Δ;2,R) ≠ FaC;L(Δ;1,R). Som man ser innebærer dette at (b) holder.

Fra disse betraktningene fremgår det – gitt forutsetningene i satsen – at (b) holder i alle tilfelle. Dette avslutter beviset for Teorem 15. **QED**.

I §3.1 ble det følgende opplagte korollar til de to sistnevnte satser nevnt:

Teorem 16 (T;1) ø≠Δ;1 & ø≠Δ;2 & Δ;1,Δ;2êPt(CFm(L)) & Cons(Δ;i) (i=1,2) & 1≤Cd(Δ;i)≤ Aleph;0 (i=1,2) & RêM(L) & FaC;L(Δ;i,R) ≠ø (i=1,2) –> (¬CTr;L(Δ;1,Δ;2,R) & ¬CTr;L(Δ;2,Δ;1,R))

Bevis: Satsen følger umiddelbart fra Teorem 14 og Teorem 15 samt definisjonen av "CTr;L(Δ;1,Δ;2,R)" som ble gitt i §3.1. **QED**

Det bør tilslutt nevnes at vi Teorem 13 – Teorem 14 har brukt svært lite av den informasjon som ligger i at L er et første-ordens språk og at R er en modell for L. Det eneste som trengs i bevisene ovenfor er at dersom p,q er to formler i et slikt språk så er (p&q), samt ¬p, det også, og at hvis p,qêCFm(L) og R en modell for L så har man at:

(i) Sann(R, (p&q)) <–> (Sann(R,p) & Sann(R,q))

(ii) Sann(R,¬p) <–> ¬Sann(R,p)

For alle språk L der vi har definert en klasse modeller M(L) for L og en viss relasjon "Sann(R,p)", der RêM(L) og p er en lukket formel i L, og hvor modellene oppfyller kravene (i) og (ii), og hvor man endelig har at klassen av de lukkede formlene i L er lukket under konjunksjon og negasjon, kan man utlede Teorem 13 – Teorem 15, gitt de definisjonene vi innførte i §3.1. Satsene ovenfor gjelder derfor for en meget mer omfattende klasse av språk enn bare første-ordens språk.

Vi har nå gitt bevis for alle de teoremene som ble nevnt i DEL I og har dermed fullført den oppgaven vi satte oss i dette skrift.

*****

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Referanser

Referanser

Popper [1], Popper, Karl R., Objective Knowledge. An Evolutionary approach, Oxford University Press, 1972
Rognes [1], Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1987

*

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Copyright beskrivelse

Dette arbeidet er © Morten Rognes 2002. Det er fullstendig fritt i den forstand at man kan kopiere det for eget bruk og distribuere kopier til andre så lenge dette ikke er for salg eller økonomisk vinning. *Kopier må være av arbeidet i sin helhet og i sin opprinnelige form slik det er distribuert her, og må i tillegg inneholde denne copyright-beskrivelsen skrevet på norsk* .

Det er lov til å sitere fra dette arbeidet i egne skrifter etter de regler og standarder som er internasjonalt akseptert for sitering i vitenskapelige publikasjoner. Under ingen omstendigheter er det lov å sitere deler av dette arbeid, eller hele dette arbeid, på en slik måte at man utgir det for å være ens eget.

Henvisninger til dette arbeid bør inneholde de følgende data i en komma-separert liste: etternavnet til denne forfatteren, fornavnet til denne forfatteren, tittelen på arbeidet, årstallet det opprinnelig ble skrevet som angitt på tittelbladet, uttrykket "Upublisert", den fullstendige URL fra hvilket dette arbeidet ble lastet ned, dato og årstall for nedlasting, samt det versjonsnummeret som er angitt på tittelbladet. Eksempel:

> Rognes, Morten, "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære", 1985, Upublisert, http://www.uio.no/~mrognes/arbeider/mrog73a.sit.hqx, 4-4-2002, v1.00.